



HAUSAUFGABEN 9

**Themenblock: Kegeltypen, quasi-konvexe Untergruppe**

*Abgabe in Zweierpaaren bis zum 20.12.2019 im ersten Stock  
Besprechung am 18.12.2019*

---

**Aufgabe 1.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Sind  $G$  und  $H$  hyperbolisch, so ist auch  $G * H$  hyperbolisch.
2. Ist  $G * H$  hyperbolisch, so sind auch  $G$  und  $H$  hyperbolisch.

**Aufgabe 2.** (Kegeltyp-Graphen und Geodäten) Sei  $G = \langle S \rangle$  endlich erzeugt. Der *Kegeltyp-Graph* von  $G$  bezüglich  $S$  ist der gerichtet und beschriftet Graph  $\Gamma = (V, E)$  mit  $V = \{\text{Cone}_S(g) \mid g \in G\}$ , und einer mit  $s \in S$  beschriftete gerichtete Kante  $(\text{Cone}_S(g), \text{Cone}_S(gs))$  genau dann, wenn  $s \in \text{Cone}_S(g)$ .

Zeigen Sie, dass gerichtete Pfade in den Kegeltyp-Graphen Geodäten in  $\text{Cay}(G, S)$  bestimmen.

**Aufgabe 3.** Sei  $W$  die Coxetergruppe

$$W = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_i^2, (s_i s_j)^3 \rangle.$$

Wie viele Kegeltypen hat  $W$  bezüglich  $S$ ? Bestimmen Sie den Kegeltyp Graphen von  $W$  bezüglich  $S$ .

**Aufgabe 4.** Finden Sie ein Element unendlicher Ordnung in

1.  $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ;
2.  $G = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1^2, s_2^2, s_3^2, (s_1 s_2)^p, (s_1 s_3)^q, (s_2 s_3)^r \rangle$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 1$ .

**Aufgabe 5.** Sei  $G$  endlich erzeugt.

1. Sei  $H < G$  quasi-konvex. Zeigen Sie, dass  $H$  endlich erzeugt ist und, dass die Inklusionsabbildung  $H \rightarrow G$  eine quasi-isometrische Einbettung ist.
2. Seien  $H, H' < G$  quasi-konvexe Untergruppe. Zeigen Sie, dass auch  $H \cap H'$  quasi-konvex ist.