



HAUSAUFGABEN 9

Themenblock: Kegeltypen, quasi-konvexe Untergruppe

*Abgabe in Zweierpaaren bis zum 20.12.2019 im ersten Stock
Besprechung am 18.12.2019*

Aufgabe 1. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Sind G und H hyperbolisch, so ist auch $G * H$ hyperbolisch.
2. Ist $G * H$ hyperbolisch, so sind auch G und H hyperbolisch.

Aufgabe 2. (Kegeltyp-Graphen und Geodäten) Sei $G = \langle S \rangle$ endlich erzeugt. Der *Kegeltyp-Graph* von G bezüglich S ist der gerichtet und beschriftet Graph $\Gamma = (V, E)$ mit $V = \{\text{Cone}_S(g) \mid g \in G\}$, und einer mit $s \in S$ beschriftete gerichtete Kante $(\text{Cone}_S(g), \text{Cone}_S(gs))$ genau dann, wenn $s \in \text{Cone}_S(g)$.

Zeigen Sie, dass gerichtete Pfade in den Kegeltyp-Graphen Geodäten in $\text{Cay}(G, S)$ bestimmen.

Aufgabe 3. Sei W die Coxetergruppe

$$W = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_i^2, (s_i s_j)^3 \rangle.$$

Wie viele Kegeltypen hat W bezüglich S ? Bestimmen Sie den Kegeltyp Graphen von W bezüglich S .

Aufgabe 4. Finden Sie ein Element unendlicher Ordnung in

1. $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$;
2. $G = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1^2, s_2^2, s_3^2, (s_1 s_2)^p, (s_1 s_3)^q, (s_2 s_3)^r \rangle$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 1$.

Aufgabe 5. Sei G endlich erzeugt.

1. Sei $H < G$ quasi-konvex. Zeigen Sie, dass H endlich erzeugt ist und, dass die Inklusionsabbildung $H \rightarrow G$ eine quasi-isometrische Einbettung ist.
2. Seien $H, H' < G$ quasi-konvexe Untergruppe. Zeigen Sie, dass auch $H \cap H'$ quasi-konvex ist.