RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Geometrische Gruppentheorie
Heidelberg, 6.12.2019

Hausaufgaben 8

Thema der Woche: Hyperbolische Gruppe

Keine Abgabe;
Besprechung in der Übung am 11.12.2019

Aufgabe 1. (Quasi-Isometrie-Invarianz?) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort. Es seien G und H endlich erzeugte Gruppen.

1. G ist endlich und H ist hyperbolisch. Dann ist $G \times H$ hyperbolisch.
2. $G \times H$ ist nicht hyperbolisch. Dann ist G oder H nicht hyperbolisch.

Aufgabe 2. (Freies Produkt von zyklischen Gruppen)
Zeigen Sie, dass ein $\delta \geq 0$ existiert, so dass das freie Produkt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ für $n, m \in \mathbb{N}$ eine δ-hyperbolische Gruppe ist.

Aufgabe 3. Ein metrischer Raum X heißt $\mathbb{R}$-*Baum*, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:

- Es existiert genau ein geodätisches Segment $[x, y]$ von x nach y.
- Wenn $[x, z] \cap [z, y] = \{z\}$ ist, dann gilt $[x, z] \cup [z, y] = [x, y]$.

1. Überlegen Sie sich für die folgenden Räume, ob diese $\mathbb{R}$-Bäume sind oder nicht.
   (a) Simpliziale Bäume mit der kombinatorischen Metrik
   (b) $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Standard-Metrik
   (c) $\mathbb{R}^2$ mit der Metrik d, wobei d definiert ist durch
   $$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_1| + |x_2 - x_1| + |y_2| & \text{falls } x_1 \neq x_2 \\ |y_2 - y_1| & \text{falls } x_1 = x_2 \end{cases}$$
2. Zeigen Sie, dass ein geodetischer metrischer Raum genau dann ein $\mathbb{R}$-Baum ist, wenn er 0-hyperbolisch ist.

Aufgabe 4. Sei (X, d) ein δ-hyperbolischer Raum. Zeigen Sie, dass $c(\delta)$ existiert, so dass für alle $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$ und für jede Geodäte $\gamma_{i,j}$ mit Endpunkten x_i, x_j, ein Baum T_{x_1,x_2,x_3,x_4} existiert und eine (c, c)-quasi-Isometrie

$$f : \bigcup_{i,j} \gamma_{i,j} \to T_{x_1,x_2,x_3,x_4}.$$