RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Geometrische Gruppentheorie
Heidelberg, 28.11.2019

Hausaufgaben 7

Themenblock: Geometrische Eigenschaften

Abgabe in Zweierpaaren bis zum 4.12.2019 im ersten Stock
Besprechung am 6.12.2019

Aufgabe 1. (Geometrische Eigenschaften von Gruppen) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Die Eigenschaft *unendlich und torsionsfrei* ist eine geometrische Eigenschaft von Gruppen.

2. Die Eigenschaft *enthält eine Untergruppe von endlichem Index, die zu einem freien Produkt zweier nicht-trivialer Gruppen isomorph ist* ist eine geometrische Eigenschaft von Gruppen.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass der Präsentationskomplex von $\langle a, b |\, a^2, b^2 \rangle$ homöomorph ist zu zwei an einem Punkt verklebten projektiven Ebenen. Wie sieht der zugehörige Cayley-2-Komplex aus?

Aufgabe 3. Sei $\Gamma < \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$ die Gruppe

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} |a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1. Zeigen Sie, dass Γ endlich erzeugt ist.

2. Finden Sie einen injektiven Homomorphismus $j : \mathbb{Z}^2 \to \Gamma$, der keine quasi-isometrische Einbettung ist.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass eine Gruppe genau dann endlich präsentiert ist, wenn sie eigentlich diskontinuerlich, kokompakt und durch Isometrien auf einem einfach zusammenhängenden, geodätischen Raum wirkt.

Aufgabe 5. Eine Untergruppe $H < G$ heißt *Retraktion* wenn ein Homomorphismus $r : G \to H$ existiert, sodass $r|_h = \mathrm{Id}$. Zeigen Sie, dass H endlich präsentiert ist, wenn $H < G$ eine Retraktion und G endlich präsentiert ist.