RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Geometrische Gruppentheorie
Heidelberg, 20.11.2019

Hausaufgaben 6

Thema der Woche: Milnor-Svarc

Keine Abgabe;
Besprechung in der Übung am 27.11.2019

Aufgabe 1. (Quasi-Isometrie-Invarianz?) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort. Seien X und Y metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Quasi-Isometrie.

1. Ist X geodätisch, so ist auch Y geodätisch.

2. Ist X geodätisch ist, so ist Y quasi-geodätisch.

3. Ist X quasi-geodätisch, so ist auch Y quasi-geodätisch.

Aufgabe 2. Sei $X := (\mathbb{Z} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{Z}) \subset \mathbb{R}^2$ mit der von der ℓ^1-Metrik auf $\mathbb{R}^2$ induzierten Metrik. Illustrieren Sie Ihre Argumente jeweils durch geeignete Skizzen!

1. Zeigen Sie, dass jede quasi-isometrische Einbettung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ bereits eine Quasi-Isometrie ist.

2. Zeigen Sie, dass es keine quasi-isometrische Einbettung $X \to \mathbb{Z}$ gibt.

3. Folgern Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ sind $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}^n$ nicht quasi-isometrisch.

4. Folgern Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ sind $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{F}_n$ nicht quasi-isometrisch.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^2$ mit

1. $$f(t) = t \cdot (\sin(\ln(1+t)), \cos(\ln(1+t)))$$

   eine quasi-isometrische Einbettung bezüglich der Standard-Metriken ist. Skizzieren Sie $f(\mathbb{R}_{\geq 0})$!

2. $$f(t) = t \cdot (\sin(t), \cos(t))$$

   quasi-dicht ist. Sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ quasi-isometrisch?

Aufgabe 4. (Anwendungen von Svarc-Milnor) Überprüfen Sie für die folgenden Gruppenwirkungen, welche Voraussetzungen von Švarc-Milnor erfüllt sind und welche nicht.

1. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ wirkt auf $\mathbb{R}^2$ durch Matrixmultiplikation.

2. $\mathbb{Z}$ wirkt auf $X = \{(a^3, b) | \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ mit der von der euklidischen Standard-Metrik induzierten Metrik durch $n.(a^3, b) = (a^3, b + n)$.

3. $\mathbb{Z}^2$ wirkt auf $X = \{(a, b, c) | \ a, b, c \in \mathbb{R}, |b - c| \leq 7\}$ mit der von der euklidischen Standard-Metrik induzierten Metrik durch $(n, m).(a, b, c) = (n + a, m + b, m + c)$.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass $\mathsf{QI}(\mathbb{Z}, \|\cdot\|)$ überabzählbar ist.
Hinweis: finden Sie einen injektiven Homomorphismus $\phi : (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \to \mathsf{QI}(\mathbb{Z})$.