RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Geometrische Gruppentheorie
Heidelberg, 14.11.2019

Hausaufgaben 5

Themenblock: Quasi-Isometrien

Abgabe in Zweierpaaren bis zum 22.11.2019 im ersten Stock
Besprechung am 20.11.2019

Aufgabe 1. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Die metrischen Räume $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ (bzgl. der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik) sind quasi-isometrisch.

2. Die metrischen Räume $\mathbb{Z}$ und $\{n^3|n \in \mathbb{Z}\}$ (bzgl. der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik) sind quasi-isometrisch.

3. Die metrischen Räume $(\mathbb{F}(S_1 = \{a, b\}), d_{S_1})$ und $(\mathbb{F}(S_2 = \{a, b, c\}), d_{S_2})$ sind quasi-isometrisch.

Aufgabe 2. Sei G eine endliche erzeugte Gruppe, die eigentlich diskontinuerlich und ko-beschränkt durch Isometrien auf $\mathbb{R}$ wirkt. Zeigen Sie, dass G eine Untergruppe von endlichem Index besitzt, die zu $\mathbb{Z}$ isomorph ist.

Aufgabe 3. (Wortmetrik)
Sei G eine Grupppe und S ein Erzeugendensystem. In der Vorlesung wurde die Metrik d_{Cay} auf dem Graphen $|\mathrm{Cay}(G, S)|$ und - durch Einschränkung auf die Ecken - die Metrik d_{Cay} auf G definiert. Sei $d_S : G \times G \to \mathbb{R}$ die Wortlänge:

$$d_S(g, h) = \min\{n \mid \exists s_1, \dots, s_n \in S \text{ mit } g^{-1}h = s_1 \cdots s_n\}$$

und $d_S(g, h) = 0$ genau dann, wenn $g = h$. Zeigen Sie, dass für alle $g, h \in G$ gilt:

$$d_{\mathrm{Cay}}(g, h) = d_S(g, h)$$

Aufgabe 4. (Verschiedene Metriken)
Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit der Euklidischen Metrik d_E und der sogenannten Manhattan-Metrik d_M, die gegeben ist durch $d_M((p_1, p_2), (q_1, q_2)) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|$.

1. Überlegen Sie sich, wie Geodätische in $(\mathbb{R}^2, d_E)$ und $(\mathbb{R}^2, d_M)$ aussehen können.

2. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, d_E)$ und $(\mathbb{R}^2, d_M)$ quasi-isometrisch sind.