



HAUSAUFGABEN 4

Thema der Woche: Präsentierungen, Pingpong Lemma

Keine Abgabe;

Besprechung in der Übung am 13.10.2019

Aufgabe 1. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Es gilt $\langle s, t|t^2, tst^{-1}s \rangle \cong \langle a, b|a^2, b^2 \rangle$.
2. Die Gruppe $\langle x, y|xy^{2019}x = yx^{2020} \rangle$ ist trivial.

Aufgabe 2. (Coxetergruppe)

1. Zeigen Sie, dass die 4-erzeugte Coxetergruppe W_M mit $m_{i,j} = \infty \forall i \neq j$ eine Untergruppe hat, die zu \mathbb{F}_2 isomorph ist. (*Hinweis: Zeichnen Sie $\text{Cay}(W_M, \{s_1, s_2, s_3, s_4\})$).*)
2. Zeigen Sie, dass die Coxetergruppe mit Coxeter Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Untergruppe hat, die isomorph zu \mathbb{Z}^2 ist.

3. Zeichnen Sie einen Ausschnitt von $\text{Cay}(W_M, \{s_1, s_2, s_3, s_4\})$, wobei $m_{12} = m_{13} = m_{23} = 3$, $m_{14} = m_{24} = m_{34} = \infty$. Finden Sie eine Untergruppe G_1 von W_M isomorph zu \mathbb{Z}^2 und eine Untergruppe G_2 von W_M isomorph zu \mathbb{F}_2 .

Aufgabe 3. Sei T ein Baum. Ein Automorphismus ϕ von T heißt *hyperbolisch*, falls er auf einem zu $\text{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$ isomorphen Teilbaum von T eine Wirkung durch nichttriviale Translationen induziert. Dieser zu $\text{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$ isomorphe Teilbaum $C(\phi)$ heißt *Achse* von ϕ .

Zeigen Sie: Sind ϕ und ψ zwei hyperbolische Automorphismen von T mit disjunkten Achsen, dann ist $\langle \phi, \psi \rangle$ freie Untergruppe von $\text{Aut}(T)$.

Hinweis: Ping-Pong!

Aufgabe 4. (freie Rotationsgruppen) Zeigen Sie, dass $SO(3)$ eine freie Gruppe vom Rang 2 als Untergruppe enthält.

Hinweis: Betrachten Sie

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

und Teilbarkeit durch 5 für die Wirkung auf

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 5^n x \\ 5^n y \\ 5^n z \end{pmatrix} \mid x, y, z, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$