



HAUSAUFGABEN 2

**Thema der Woche: Cayleygraphen**

*Keine Abgabe;*

*Besprechung in der Übung am 30.10.2019*

---

**Aufgabe 1.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Ist  $X$  unendlich, so ist die symmetrische Gruppe  $S_X$  nicht endlich erzeugt.
2. Für jedes  $n$  existiert eine Untergruppe  $H < \mathbb{Z}^2$ , die zu  $\mathbb{Z}_n$  isomorph ist.
3. Für jedes  $n$  existiert eine Untergruppe  $H < \mathbb{F}_2$ , die zu  $\mathbb{F}_n$  isomorph ist.

**Aufgabe 2.** (Cayleygraphen)

1. Zeichnen Sie einen zusammenhängenden Cayleygraph für  $D_5$  mit 2 Erzeugern.
2. Zeichnen Sie den Cayleygraph für  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  mit den Erzeugern  $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$ .

**Aufgabe 3.** Zeigen Sie, dass der Petersen-Graph kein Cayleygraph ist.

**Aufgabe 4.** (Bäumen und freie Gruppen)

1. Bestimmen Sie den Grad der Ecken im Cayleygraph einer freien Gruppe mit freiem Erzeugendensystem  $S$ .
2. Sei  $T_4$  ein 4-regulärer Baum. Zeigen Sie, dass  $\text{Aut}(T_4)$  überabzählbar ist.

**Aufgabe 5.** Zeigen Sie, dass zu jeder abzählbaren Gruppe  $G$  einen zusammenhängenden Graph  $\Gamma$  existiert, so dass  $\text{Aut}(\Gamma) \cong G$ .