Symplektische Geometrie **Blatt 7**
Albers, Fuchs **SoSe 2017**

Abgabe am Dienstag, dem 13. Juni 2017 in der Vorlesung

Aufgabe 1. Sei (B, g) eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\Omega \in \Omega^2(B)$ eine geschlossene 2-Form auf B. Es bezeichne $\pi : T^*B \to B$ das Kotangentialbündel von B und $H : T^*B \to \mathbb{R}$ die Hamiltonsche Funktion gegeben durch $(q, p) \mapsto |p|_g^2$.

a) Zeigen Sie, dass $\omega_{\text{can}} + \pi^*\Omega \in \Omega^2(T^*B)$ eine symplektische Form ist.

b) Sei $\Omega = d\gamma$ exakt. Finden Sie einen exakten Symplektomorphismus $\varphi : (T^*B, \omega_{\text{can}} + \pi^*\Omega, \lambda_{\text{can}} + \pi^*\gamma) \to (T^*B, \omega_{\text{can}}, \lambda_{\text{can}})$ der H mit $\tilde{H}(q, p) = |p + \pi^*\gamma_q|_g^2$ identifiziert.

c) Für welche $\Omega = d\gamma$ ist das Einheitskotangentialbündel $S^*B := \{(q, p) \in T^*B \,|\, |p|_g = 1\}$ von eingeschränktem Kontakttyp in $(T^*B, \omega_{\text{can}} + \pi^*\Omega, \lambda_{\text{can}} + \pi^*\gamma)$?

Aufgabe 2. Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Eine fast komplexe Struktur auf M ist ein (Vektorbündel-)Endomorphismus $J : TM \to TM$ mit $J \circ J = -id$.
Eine fast komplexe Struktur J heisst *kompatibel* mit der symplektischen Form ω, wenn $\omega(\cdot, J\cdot)$ eine Riemannsche Metrik definiert.

a) Zeigen Sie, dass die standard komplexe Struktur i auf $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ eine fast komplexe Struktur definiert, die kompatibel ist mit $\omega_0 = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j$.

b) Beweisen Sie, dass $-\frac{1}{4}d(r^2) \circ i$ eine Liouville Form λ auf $\mathbb{C}^n$ definiert, wobei (in Polarkoordinaten) $r^2 = \sum_{j=1}^n r_j^2$.

c) Zeigen Sie, dass die Einheitssphäre S^{2n-1} von eingeschränktem Kontakttyp ist und bestimmen Sie den assoziierten Reebfluss auf S^{2n-1}.

Abgabe am Dienstag, dem 13. Juni 2017 in der Vorlesung

Aufgabe 3. (Hookesches Gesetz) Wir betrachten eine Masse m am Ende einer Feder und wir bezeichnen mit $q \in \mathbb{R}$ die Auslenkung der Feder aus dem Ruhezustand. Wenn die Masse m um eine Distanz q ausgelenkt ist vom Ruhezustand, so wirkt nach dem Hookschen Gesetz eine Kraft $F = -kq$ (wobei $k > 0$ eine Konstante ist). Die Bewegung der Masse an der Feder ist bestimmt durch die Hamiltonsche Funktion $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$.

a) Bestimmen Sie und lösen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen in $\mathbb{R}^2 = T^*\mathbb{R}$.
b) Zeigen Sie, dass alle Lösungen periodisch sind.
c) Wie kann man die Trajektorien direkt anhand der Hamiltonschen Funktion beschreiben?

Aufgabe 4. Für $a, b > 0$ betrachten wir den Ellipsoid

$$E_{a,b} := \left\{ (u,v) \in \mathbb{C}^2 | \frac{|u|^2}{\pi a} + \frac{|v|^2}{\pi b} \leq 1 \right\} \subset (\mathbb{C}^2, dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2)$$

a) Zeigen Sie, dass der Rand $\partial E_{a,b}$ des Ellipsoids von eingeschränktem Kontakttyp ist bzgl. der Liouville Form $\lambda = (x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + x_2 dy_2 - y_2 dx_2)/2$.
b) Bestimmen Sie den Reebfluss auf $\partial E_{a,b}$.
c) Zeigen Sie, dass der Reebfluss genau dann (genau) zwei periodische Reebtrajektorien hat, wenn a und b linear unabhängig sind über $\mathbb{Q}$.