**Symplektische Geometrie** **Blatt 6**
**Albers, Fuchs** **SoSe 2017**

Abgabe am Dienstag, dem 6. Juni 2017 in der Vorlesung

---

**Aufgabe 1.** Sei $(B, g)$ eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit und $H : T^*B \to \mathbb{R}$ gegeben durch $H(q, p) := \frac{1}{2}|p|_g^2 + U(q)$, wobei $U : B \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist.

a) Beweisen Sie, dass die Niveaufläche $H^{-1}(E)$ glatt ist, wenn $E$ ein regulärer Wert von $U$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die Niveaufläche $H^{-1}(E)$ von eingeschränktem Kontakttyp ist, wenn $E > \max_B U$.

c) Beweisen Sie, dass die Niveaufläche $H^{-1}(E)$ von eingeschränktem Kontakttyp ist, wenn $E$ ein regulärer Wert ist. (Achtung: schwierig.)

**Aufgabe 2.** Wir betrachten die Einheitssphäre $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ und definieren ein Hyperebenenfeld $\xi$ in $TS^{2n+1}$ durch

$$\xi_p := T_pS^{2n+1} \cap iT_pS^{2n+1} \subset T_pS^{2n+1} \text{ für } p \in S^{2n+1}.$$

(Hier schreiben wir $iT_pS^{2n+1} := \{iv \in T_p\mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{C}^{n+1} | v \in T_pS^{2n+1}\}$.)
Zeigen Sie, dass $\xi$ eine Kontaktstruktur auf $S^{2n+1}$ definiert.

Abgabe am Dienstag, dem 6. Juni 2017 in der Vorlesung

---

**Aufgabe 3.** Wir betrachten $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ versehen mit der Kontaktstruktur $\xi$ aus Aufgabe 2 und wir schreiben $(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^{n+1}$. Sei $\varphi : S^{2n+1} \setminus \{(0, -1)\} \to \mathbb{R}^{2n+1}$ die Abbildung gegeben durch $(z, w) \mapsto \left(\frac{z}{1+w}, \frac{i(\overline{w}-w)}{|1+w|^2}\right)$.
Zeigen Sie, dass $\varphi$ ein Diffeomorphismus ist, welcher die Kontaktstruktur $\xi$ auf $S^{2n+1} \setminus \{(0, -1)\}$ mit der Standardkontaktstruktur $\eta = \ker(ds + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n x_k dy_k - y_k dx_k)$ auf $\mathbb{R}^{2n+1}$ identifiziert.

**Aufgabe 4.** Seien $(B_i, g_i)$, $i = 1, 2$, Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $f : B_1 \to B_2$ ein Diffeomorphismus. Dann induziert $f$ einen Symplektomorphismus $f_\# : T^*B_1 \to T^*B_2$.

a) Finden Sie einen von $f$ induzierten Kontaktomorphismus $f_\natural : S^*_{g_1}B_1 \to S^*_{g_2}B_2$ zwischen den Einheitskotangentialbündeln.
b) Wann ist $f_\natural$ ein strikter Kontaktomorphismus für die Kontaktformen $\lambda_{can}|_{S^*_{g_i}B_i}$?