Symplektische Geometrie **Blatt 5**
Albers, Fuchs **SoSe 2017**

Abgabe am Dienstag, dem 23. Mai 2017 in der Vorlesung

Sei V_t ein zeitabhängiges Vektorfeld auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω). Dann heisst V_t *symplektisch*, wenn $d(\iota_{V_t}\omega) = 0$. Ausserdem nennt man V_t *Hamiltonsch*, wenn es eine zeitabhängige Funktion H_t auf M gibt mit $dH_t = \iota_{V_t}\omega$. In diesem Zusammenhang nennt man dann H_t *Hamiltonsche* Funktion.

Aufgabe 1. Sei V_t ein symplektisches Vektorfeld auf (M, ω) mit Fluss ϕ_t, $t \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass ϕ_t die symplektische Form erhält, das heisst $\phi_t^*\omega = \omega$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

b) Sei jetzt $V_t = V$ ein autonomes Hamiltonsches Vektorfeld. Zeigen Sie, dass der Fluss von V für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Niveaufläche $\Sigma_c := H^{-1}(c) \subset M$ erhält (das heisst: $\phi_t(\Sigma_c) = \Sigma_c$ für alle $t \in \mathbb{R}$).

Aufgabe 2. Wir betrachten $\mathbb{R}^{2n}$ versehen mit der standard symplektischen Struktur: $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0 = \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k)$.

a) Bestimmen Sie den Fluss der Hamiltonschen Funktion $H(x, y) = x$ auf $\mathbb{R}^2$.

b) Bestimmen Sie den Fluss der Hamiltonschen Funktion $H(x, y) = c(x^2 + y^2)$ auf $\mathbb{R}^2$.

c) Zeigen Sie, dass sich die symplektische Form auf $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ in Polarkoordinaten $z_k = r_k e^{i\varphi_k}$ schreiben lässt als $\omega_0 = \sum_{k=1}^n r_k dr_k \wedge d\varphi_k$.

d) Berechnen Sie den Fluss von $H(r, \varphi) = c|r|^2$ auf $\mathbb{C}^n$.

Abgabe am Dienstag, dem 23. Mai 2017 in der Vorlesung

Aufgabe 3. Sei $(T^{2n}, \omega = \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k)$ der $2n$-Torus und $L \subset T^{2n}$ der Lagrange Torus gegeben durch $L := \{(x, y) \in T^{2n} | y = 0\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\frac{\partial}{\partial x_1}$ ein symplektisches Vektorfeld auf T^{2n} ist.

b) Finden Sie ein (autonomes) symplektisches Vektorfeld V auf T^{2n}, dessen Fluss ψ_t L von sich selbst entfernt: $\psi_1(L) \cap L = \emptyset$.

c) Sei H_t eine Hamiltonsche Funktion auf T^2 und φ_t der assoziierte Fluss. Zeigen Sie, dass $\varphi_1(L) \cap L \neq \emptyset$.
Hinweis: Beweisen Sie zunächst ein analoges Resultat für $L_0 = \mathbb{O}_{S^1} \subset (T^*T^n, d\lambda_{\text{can}})$ indem Sie zeigen, dass $\varphi_t^* \lambda_{\text{can}}|_{L_0} = dS_t$ für eine zeitabhängige Funktion S_t auf L_0. Der Fall von $L \subset T^2$ lässt sich darauf reduzieren, indem man eine geeignete Überlagerung von T^2 betrachtet.

Aufgabe 4. Wir betrachten $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$ (mit der symplektischen Form aus 2c)) und die Hamiltonsche Funktion $H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $H(r, \varphi) := \pi |r|^2$ mit assoziiertem Hamiltonschen Vektorfeld V_H.

a) Berechnen Sie den Fluss ψ_t von H und insbesondere $\psi_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.

b) Zeigen Sie, dass $S^{2n-1} = H^{-1}(\pi)$ eine koisotrope Untermannigfaltigkeit ist, d.h. für jedes $z \in S^{2n-1}$ ist $T_z S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ ein koisotroper Unterraum.

c) Beweisen Sie, dass für jedes $z \in S^{2n-1}$ der Kern der Bilinearform $\omega_z|_{S^{2n-1}} : T_z S^{2n-1} \times T_z S^{2n-1} \to \mathbb{R}$, d.h. der Untervektorraum

$$\{v \in T_z S^{2n-1} | \omega_z(v, w) = 0 \, \forall w \in T_z S^{2n-1}\} \subset T_z S^{2n-1},$$

durch den Vektor $V_H(z)$ aufgespannt wird.

d) Zeigen Sie, dass die Hopf Abbildung $S^{2n-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ gegeben durch $(z_1, \ldots, z_n) \to [z_1 : \ldots : z_n]$ auf den Orbiten des Flusses ψ_t konstant ist.