**Symplektische Geometrie** **Blatt 4**
**Albers, Fuchs** **SoSe 2017**

Abgabe am Dienstag, dem 16. Mai 2017 in der Vorlesung

---

**Aufgabe 1.** Sei $N$ eine Mannigfaltigkeit und $\gamma \in \Omega^1(N)$ eine geschlossene 1-Form, das heisst $d\gamma = 0$. Sei ausserdem $\pi : T^*N \to N$ die Projektion des Kotangentialbündels. Betrachten Sie die Abbildung $\psi : T^*N \to T^*N$ gegeben durch $(x, \xi) \mapsto (x, \xi + \gamma(x))$.

a) Zeigen Sie, dass $\psi^*\lambda_{can} = \lambda_{can} + \pi^*\gamma$ .

b) Folgern Sie, dass $\psi$ ein Symplektomorphismus von $(T^*N, \omega_{can} = d\lambda_{can})$ ist.

**Aufgabe 2.** a) Finden Sie einen Symplektomorphismus $\varphi : (T^*\mathbb{R}^n, \omega_{can}) \to (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, der den Nullschnitt $\mathbb{O}_{\mathbb{R}^n} \subset T^*\mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{2n}$ identifiziert.

b) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus. Berechnen Sie den von $f$ induzierten Diffeomorphismus auf dem Kotangentialbündel $T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$.

c) Sei $K \subset \mathbb{R}^{2n}$ kompakt und $\varepsilon > 0$. Finden Sie einen Symplektomorphismus $\varphi$ von $\mathbb{R}^{2n}$ mit $\varphi(K) \subset \mathbb{R}^n \times (-\varepsilon, \varepsilon)^n$.

Abgabe am Dienstag, dem 16. Mai 2017 in der Vorlesung

---

**Aufgabe 3.** Sei $M$ eine geschlossene Mannigfaltigkeit (das heisst $M$ ist kompakt und hat keinen Rand). Sei $\beta \in \Omega^1(M)$ eine geschlossene 1-Form und $L_\beta \subset T^*M$ der Graph von $\beta$; dies ist eine Lagrange Untermannigfaltigkeit in $(T^*M, \omega_{can})$ nach Aufgabe 3a) auf Blatt 3.

a) Zeigen Sie, dass $L_\beta$ den Nullschnitt von $T^*M$ schneidet, wenn $\beta$ exakt ist.
(Mit anderen Worten, zeigen Sie, dass $L_\beta \cap \mathbb{O}_M \neq \emptyset$ wenn $\beta = df$ für eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$).

b) Finden Sie auf dem Torus $M = T^n$ eine geschlossene 1-Form $\beta$, sodass $L_\beta \cap \mathbb{O}_{T^n} = \emptyset$.

**Aufgabe 4.** Sei $X$ eine Mannigfaltigkeit und $T(T^*X) \to T^*X$ das Tangentialbündel des Kotangentialbündels von $X$ und $T(T^*X)|_{\mathbb{O}_{\mathbb{X}}} \to X$ seine Restriktion auf den Nullschnitt $X = \mathbb{O}_X \subset T^*X$.

a) Beweisen Sie, dass das Vektorbündel $T(T^*X)|_{\mathbb{O}_X}$ kanonisch isomorph ist zum Vektorbündel $TX \oplus T^*X \to X$.
b) Zeigen Sie, dass sich unter dieser Identifikation $\omega_{can}|_{T(T^*X)|_{\mathbb{O}_X}}$ gegeben ist durch die Bilinearform

$$\Omega : TX \oplus T^*X \to \mathbb{R} \quad ((v_1, \xi_1), (v_2, \xi_2)) \mapsto \xi_1(v_2) - \xi_2(v_1).$$

(Vergleiche Aufgabe 2 auf Blatt 2).