Symplektische Geometrie **Blatt 2**
Albers, Fuchs **SoSe 2017**

Abgabe am Dienstag, dem 2. Mai 2017 in der Vorlesung

Aufgabe 1. (Basiserweiterung). Sei (V, Ω) mit $\dim(V) = 2n$ ein symplektischer Vektorraum und $W \subset V$ ein isotroper Unterraum. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Jede Basis $e_1, \dots, e_k$ von W lässt sich zu einer Basis $e_1, \dots, e_n$ von einem Lagrange Unterraum L in (V, Ω) erweitern.

b) Jede Basis $e_1, \dots, e_n$ von einem Lagrange Unterraum $L \subset V$ lässt sich zu einer symplektischen Basis $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ von (V, Ω) erweitern.

Hinweis: Um in b) den Vektor f_1 zu finden, betrachten Sie Y^Ω wobei $Y = \mathrm{Span}(e_2, \dots, e_n)$. In Teilaufgabe a) kann man analog vorgehen.

Aufgabe 2. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für einen Vektorraum W definiert die Bilinearform Ω_W auf $W \oplus W^*$ gegeben durch

$$\Omega_W((u, \alpha), (v, \beta)) = \beta(u) - \alpha(v)$$

eine symplektische Form.

b) Sei (V, Ω) ein symplektischer Vektorraum und $L \subset V$ ein Lagrange Unterraum. Dann ist (V, Ω) isomorph zu $(L \oplus L^*, \Omega_L)$.
Hinweis: Identifizieren Sie eine Basis von $L \oplus L^*$, bestehend aus einer Basis von L und der zugehörigen Dualbasis auf L^*, mit einer symplektischen Basis von (V, Ω).

Abgabe am Dienstag, dem 2. Mai 2017 in der Vorlesung

Aufgabe 3. Betrachten Sie den vertikalen Lagrange Unterraum

$$\Lambda_{\text{vert}} := \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} | x = 0\} \subset (\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\text{std}}).$$

Wir bezeichnen mit $\Sigma(n)$ die Menge der Lagrange Unterräume L in $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\text{std}})$, welche den vertikalen Unterraum Λ_{vert} nicht-trivial schneiden, d.h. $L \cap \Lambda_{\text{vert}} \neq \{0\}$.
Beweisen Sie, dass sich $\mathcal{L}(n)$ als disjunkte Vereinigung

$$\mathcal{L}(n) = \mathcal{L}_0(n) \cup \Sigma(n)$$

schreiben lässt, wobei $\mathcal{L}_0(n)$ mit den symmetrischen Matrizen

$$\text{Sym}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | A^T = A\}$$

identifiziert werden kann.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass

$$Sp(2n, \mathbb{R}) \cap O(2n, \mathbb{R}) = Sp(2n, \mathbb{R}) \cap GL(n, \mathbb{C}) = O(2n, \mathbb{R}) \cap GL(n, \mathbb{C}) = U(n).$$