# Programm zum Proseminar:
# Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Marvin Schneider, Max Witzelsperger

Sommersemester 2025

## Vortrag 1: Hintergrund aus der Gruppentheorie

Gib eine kurze Wiederholung der Begriffe **Gruppe**, **Untergruppe**, **Ordnung** einer Gruppe sowie **abelsche Gruppe**. Behandle die Beispiele [JL01, Ex. 1.1] für Gruppen, insbesondere die **zyklischen Gruppen** $C_n$, die **symmetrischen Gruppen** $\mathfrak{S}_n$ und die **Diedergruppen** $D_{2n}$. Formuliere und beweise den **Satz von Lagrange** [JL01, 1.6] und führe den **Index** einer Untergruppe ein, sowie den Begriff der **einfachen** Gruppe.
Kapitel 12 in [JL01] folgend, erkläre den Begriff der **Konjugiertheit** und zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf einer Gruppe ist. Definiere den **Zentralisator** und zeige [JL01, Thm. 12.8] über die Größe der Konjugationsklassen. Bestimme als Beispiel die Konjugationsklassen in Diedergruppen und, falls Zeit bleibt, auch in den symmetrischen Gruppen.

## Vortrag 2: Grundlagen zu linearen Darstellungen

Präsentiere [Ser77, I.1.1 - 1.3]: Führe den Begriff einer linearen **Darstellung einer Gruppe** ein und erkläre, was es für zwei Darstellungen heißt, **isomorph** zu sein. Behandle erste Beispiele, insbesondere die triviale Darstellung und die **reguläre Darstellung** einer Gruppe. Als explizites Beispiel behandle [JL01, Ex. 3.2(1) und 3.4(1)].
Definiere schließlich **Unterdarstellungen** und **stabile Komplemente**; formuliere und beweise [Ser77, 1.3 Thm. 1] über die Existenz stabiler Komplemente. Dieses Resultat ist auch als **Satz von Maschke** bekannt.

## Vortrag 3: Irreduzible Darstellungen, direkte Summen und Tensorprodukte

Um neue Darstellungen aus alten konstruieren zu können, definiere **direkte Summen von Darstellungen** gemäß dem letzten Teil des Remark am Ende von Abschnitt I.1.3 in [Ser77], sowie das **Tensorprodukt zweier Darstellungen** [Ser77, I.1.5].
Definiere nun **irreduzible Darstellungen** [Ser77, I.1.4]; beweise dass jede Darstellung direkte Summe irreduzibler Darstellungen ist, und diskutiere die Frage nach der Eindeutigkeit dieser Zerlegung [Ser77, I.1.4 Thm. 2 und das folgende Remark]. Diese Eindeutigkeitsfragen werden in Vortrag 6 wieder aufgegriffen.
Formuliere und beweise das **Lemma von Schur** [Ser77, I.2.2 Prop. 4], sowie die Umkehrung von Teil (2) darin, siehe dafür [JL01, Prop. 9.2]. Als Anwendung behandle die Beispiele [JL01, Ex. 9.4].

## Vortrag 4: Charaktere und Orthogonalitätsrelationen

Definiere den zentralen Begriff des **Charakters** einer Darstellung; zeige die grundlegenden Eigenschaften von Charakteren sowie ihr Verhalten bzgl. Tensorprodukten und direkten Summen. Siehe [Ser77, I.2.1] bis Proposition 2.

Behandle Corollaries 1 - 3 aus dem Lemma von Schur in [Ser77, I.2.2], und formuliere diese insbesondere in Termen der Paarung $\langle \phi, \psi \rangle$ aus Remarks (1) am Ende von I.2.2.
Folge nun I.2.3 und führe das hermitesche Skalarprodukt $(\phi|\psi)$ auf dem Raum $\mathbb{C}^G$ aller Abbildungen $G \to \mathbb{C}$ ein und erkläre seinen Zusammenhang mit $\langle \phi, \psi \rangle$. Gehe hierbei darauf ein, warum man die Existenz einer orthonormalen Basis der Darstellung annehmen kann (letzte Remarks in I.1.3 und I.2.2); für die Definition eines hermiteschen Skalarproduktes siehe [JL01, (14.2)]. Beweise Thm. 3, welches besagt, dass die irreduziblen Charaktere von $G$ ein orthonormales System in $\mathbb{C}^G$ bzgl. des obigen Skalarproduktes bilden.

## Vortrag 5: Strukturtheoreme für Darstellungen

Wir verwenden die Ergebnisse des vorherigen Vortrages, um die Darstellungen einer gegebenen endlichen Gruppe mittels ihrer Charaktere zu klassifizieren. Präsentiere die Ergebnisse aus dem Rest des Abschnittes [Ser77, I.2.3] ab Thm. 4; wir sehen insbesondere, dass man den Isomorphietyp einer Darstellung an ihrem Charakter ablesen kann, und erhalten überdies ein einfaches Irreduzibilitätskriterium.
Behandle dann die Zerlegung der regulären Darstellung [Ser77, I.2.4], um die Klassifikation der irreduziblen Charaktere einer Gruppe zu präzisieren (insbesondere in Form von Corollary 2(a)). Definiere schließlich den Raum $H$ der **Klassenfunktionen** auf einer Gruppe (S. 11 in I.2.1) und präsentiere §I.2.5 bis Thm. 7 als vorläufigen Abschluss der Strukturtheorie.

## Vortrag 6: Charaktertafeln, Kanonische Zerlegungen, abelsche Gruppen

Präsentiere zunächst den Inhalt von [Ser77, I.2.6] über **kanonische Zerlegungen** und isotypische Komponenten von Darstellungen, um die Strukturtheorie aus Vortrag 5 abzurunden.
Definiere dann **Charaktertafeln** [JL01, §16] und verwende unsere Klassifikationsresultate, um die Charaktertafeln einiger Beispiele von Gruppen zu bestimmen, etwa von der Diedergruppe $D_6$ (die isomorph zur symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_3$ ist), siehe [Ser77, Ex. am Ende von I.2.5] oder [JL01, Ex. 16.3(1)].
Schließlich wenden wir unsere Theorie auf den einfachen Fall der endlichen abelschen Gruppen an: Behandle [Ser77, I.3.1]; bestimme dann die Charaktertafekn der zyklischen Gruppen $C_n$ auf [Ser77, I.5.1]. Falls Zeit bleibt, erkläre, dass die Darstellungstheorie der endlichen abelschen Gruppen sich auf jene der zyklischen Gruppen reduzieren lässt: Behanlde [Ser77, I.3.2] über Produkte von Gruppen und deren Darstellungen, insbesondere Thm. 10; zitiere dann ohne Beweis den **Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen**, welcher besagt dass jede endliche abelsche Gruppe ein Produkt zyklischer Gruppen ist; s. z.B. [KM10, Satz 10.4].

## Vortrag 7: Induzierte Darstellungen

Behandle alles in [Ser77, I.3.3]: Definiere die **induzierte Darstellung** einer Untergruppe, gib erste Beispiele und zeige Existenz und Eindeutigkeit (Thm. 11). In Thm. 12 sehen wir, wie sich die Charaktere induzierter Darstellungen verhalten.
Präsentiere dann die Abschnitte II.7.3 und II.7.4 mit dem Ziel, das **Kriterium von Mackey** für die Irreduzibilität induzierter Darstellungen (Prop. 23) zu beweisen. Die im Beweis von Prop. 23 benutzte **Reziprozitätsformel von Frobenius** (Thm. 13 in II.7.2) wird im nächsten Vortrag bewiesen und darf hier ohne Beweis verwendet werden. Beachte dass der in II.7 verwendete Begriff „$\mathbb{C}[G]$-module“ gleichbedeutend mit „Darstellung von $G$“ ist. Falls Zeit bleibt, diskutiere als Beispiel die induzierte Darstellung $\rho^h$ der Diedergruppe $D_n$ aus I.5.3.

## Vortrag 8: Die Gruppenalgebra, Frobeniusreziprozität

Definiere die **Gruppenalgebra** $K[G]$ und erkläre die neue Perspektive auf Darstellungen als $K[G]$-Moduln; siehe den Anfang von [Ser77, II.6.1]. Zeige dann aus II.6.2 die Propositionen 10 und 11 über die Zerlegung von $\mathbb{C}[G]$ sowie die **Fourier-Umkehrformel**. Ergänzendes Material könnte [FH04, §3.4] oder [JL01, §§6, 7] sein.
Interpretiere induzierte Darstellungen mittels der Gruppenalgebra neu (II.7.1 in [Ser77], insbesondere Prop. 18 und Rem. (1),(2)). Präsentiere dann den Inhalt von Abschnitt II.7.2, in dem die **Frobeniusreziprozität** bewiesen wird. Betone dabei besonders die neue Interpretation des Skalarproduktes $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_G$ in Lemma 2, welche auch in späteren Vorträgen eine wichtige Rolle spielen wird.

## Vortrag 9: Ganzheit von Charakteren

Beginne mit Abschnitt [Ser77, II.6.3], in dem das **Zentrum** von $\mathbb{C}[G]$ definiert und dessen Struktur untersucht wird. Wiederhole in diesem Zusammenhang auch die Definition des Zentrums einer Gruppe.
Als nächstes machen wir mit II.6.4 einen Exkurs in die Welt der **ganzen algebraischen Zahlen**: Erkläre den Begriff der Ganzheit und zeige die dort präsentierten grundlegenden Eigenschaften. Als Beispiele zeige dass die Menge der ganzen algebraischen Zahlen in $\mathbb{Q}$ genau $\mathbb{Z}$ ist, erkläre warum die primitive $n$-te Einheitswurzel $\zeta_n = e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$ ganz algebraisch ist (s. z.B. [KM10, Kap. 28]), und folgere mit [Ser77, II.6.4 Cor. 1], dass der Ring $\mathbb{Z}[\zeta_n]$ aus ganzen algebraischen Zahlen besteht.
Mit dieser Theorie leite schließlich die Ganzheitseigenschaften von Charakteren (II.6.5) her, insbesondere das überraschende Ergebnis, dass der Grad einer irreduziblen Darstellung von $G$ stets ein Teiler der Ordnung von $G$ ist (s. Prop. 17 für eine noch stärkere Variante).

## Vortrag 10: Der Satz von Burnside

Als Anwendung der Darstellungstheorie soll in diesem Vortrag der rein gruppentheoretische **Satz von Burnside** bewiesen werden, welcher besagt dass eine Gruppe $G$, deren Ordnung höchstens zwei Primteiler besitzt, stets **auflösbar** ist; dies ist Exercise 8.6(ii) in [Ser77, II.8.3].
Definiere zunächst den Begriff der **auflösbaren** und der **$p$-Gruppe**, s. Anfang von II.8.3. Als Motivation für den Begriff der Auflösbarkeit erwähne den Zusammenhang zur Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen, s. z.B. die Einleitung von [KM10, Kap. 29]. Beweise dann Theorem 14, welches besagt, dass jede $p$-Gruppe auflösbar sind, womit wir den Satz von Burnside auf den Fall von Gruppen mit genau zwei Primteilern reduziert haben.
Stelle die **Sätze von Sylow** (ohne Beweis) vor, und zwar genauer die Aussagen Kor. 8.4 und Satz 8.5(b) in [KM10]. Beweise damit, dass Gruppen der Ordnung $pq$ für Primzahlen $p \neq q$ auflösbar sind (s. dazu den Beweis von [KM10, Lem. 8.7(a)]). Dies wird der Induktionsanfang für den Beweis des Satzes von Burnside sein. Als nächstes beweise, dass Gruppen der Ordnung $p^a q^b$ $(a, b \geq 1)$ niemals einfach sind, s. [Ser77, Exercises 8.6(i) und 6.10] sowie [JL01, 31.4]; dieses Ergebnis wird zentral für den Induktionsschritt sein, und hier ist es auch, wo unsere Resultate über Darstellungen, insbesondere die Ganzheit von Charakteren, entscheidend einfließen. Beweise schließlich Burnside's Satz per Induktion nach $a + b \geq 2$, wie in [Ser77, Exercise 8.6(ii)] angedeutet; für mehr Details s. auch [JL01, (31.5)]. Als Anwendung zeige, dass die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ für $n \leq 4$ auflösbar ist. Erwähne ohne Beweis, dass dies für $n \geq 5$ niemals der Fall ist.

## Vortrag 11: Der Satz von Artin

In den letzten beiden Vorträgen behandeln wir die Struktursätze von **Artin** und **Brauer**, die uns erlauben, den Charakter einer Gruppe mit Hilfe von Charakteren gewisser Untergruppen von einfacherer Gestalt auszudrücken. Ein essentielles Werkzeug ist hierbei das Konzept der induzierten Darstellung (Vortrag 7).
In diesem Vortrag zeigen wir Artin's Satz [Ser77, II.9.2 Thm. 17], welcher impliziert, dass jeder Charakter einer endlichen Gruppe $G$ eine rationale Linearkombination von Charakteren ist, die induziert sind von Charakteren auf zyklischen Untergruppen von $G$ (Cor. nach Thm. 17). Präsentiere dafür [Ser77, II.9]: Führe zunächst den **Darstellungsring** $R(G)$ ein, behandle seine grundlegenden Eigenschaften und wiederhole in diesem Zusammenhang induzierte Klassenfunktionen und Frobeniusreziprozität [Ser77, S. 55 unten und Thm. 13]. Beweise dann Theorem 17 zunächst für allgemeine Familien $X$ und gib dann den alternativen Beweis von (i)$\Rightarrow$(ii) für den Fall, dass $X$ die Familie aller zyklischen Untergruppen von $G$ ist (s. II.9.4).

## Vortrag 12: Der Satz von Brauer

Beweise das gegenüber Artin's Satz noch stärkere Theorem von **Brauer** (Thm. 19 in II.10.5), welches besagt, dass jeder Charakter auf $G$ eine **ganzzahlige** Linearkombination von Charakteren ist, die induziert von Charakteren **elementarer** Untergruppen von $G$ sind. Behandle dafür den Inhalt von [Ser77, II.10]: Erkläre $p$**-elementare Untergruppen** (II.10.1) von $G$; definiere die Untergruppe $V_p \leq R(G)$ und päsentiere Thm. 18, sowie dessen präzisierte Version Thm. 18'. Beweise zunächst, dass Thm. 19 aus Thm. 18 folgt (s. II.10.5).
Es verbleibt, Thm. 18' zu beweisen. Wir schlagen das folgende Vorgehen vor: Erläutere die Eigenschaften des in II.10.2 eingeführten Ringes $A = \mathbb{Z}[\zeta_g]$ (vgl. Vortrag 9), beweise Lemma 5 und erkläre, wie sich damit die Aussage von Thm. 18' auf $l \in A \otimes V_p$ reduziert. Beweise Lemma 6 und führe dann den Beweis von Thm. 18' (s. II.10.4) aus, unter der Annahme dass ein $\psi \in A \otimes V$ existiert, das die Voraussetzung von Lemma 9 erfüllt. Beweise schließlich die Lemmata 7 - 9.

## Literatur


[FH04] William Fulton und Joe Harris. *Representation theory: A First Course*. Bd. 129. Graduate Texts in Mathematics. Springer Science & Business Media, 2004.

[JL01] Gordon James und Martin Liebeck. *Representations and Characters of Groups*. 2. Aufl. Cambridge University Press, 2001.

[KM10] Christian Karpfinger und Kurt Meyberg. *Algebra: Gruppen-Ringe-Körper*. 2. Aufl. Link: `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-8274-2601-7`. Auch auf Heidi verfügbar. Spektrum, 2010.

[Ser77] Jean-Pierre Serre. *Linear Representations of Finite Groups*. Bd. 42. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, 1977.