

# Garben auf komplexen Räumen

Seminar im Sommersemester 2025 / AG Venjakob

## Zusammenfassung

Im Jahr 1895 formulierte Cousin zwei Fragen nach der Existenz meromorpher Funktionen auf komplexen Mannigfaltigkeiten. Eine davon lautet: Sei  $(U_i)_i$  eine offene Überdeckung einer komplexen Mannigfaltigkeit  $X$  und seien  $f_i: U_i \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  meromorphe Funktionen. Wann gibt es eine meromorphe Funktion  $f: X \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , deren Hauptteil auf den  $U_i$  mit den Hauptteilen der  $f_i$  übereinstimmt (d.h., dass alle  $f - f_i$  auf  $U_i$  holomorph sind)?

Die Techniken, die auf der Suche nach Antworten auf Fragen diesen Typs entwickelt wurden, sind den Methoden der algebraischen Geometrie sehr ähnlich. Tatsächlich sind viele algebro-geometrische Konstruktionen und Argumente direkt der komplexen Geometrie nachempfunden.

Im Seminar werden wir zuerst die wichtigen Grundbegriffe einführen, die benötigt werden, um lokale Lösungen global verkleben zu können: Garben, lokal-geringte Räume und Garbenkohomologie werden in den ersten paar Sitzungen zügig entwickelt. Im weiteren Verlauf geht es um das Studium kohärenter Garben auf komplexen Räumen. Mittels eines differentialtopologischen Komplexes werden wir einige Garbenkohomologiegruppen bestimmen und uns so dem eigentlichen Hauptresultat des Seminars nähern: Auf Steinschen Räumen verschwindet die Kohomologie aller kohärenter Garben. In diesem Fall passiert etwas Beeindruckendes: Fragen nach Existenz und Fortsetzbarkeit analytischer Funktionen haben oft rein topologische Obstruktionen, welche mit Methoden der algebraischen Topologie handhabbar sind. Für diese Klasse von Räumen ist dann auch die Beantwortung der angesprochenen Cousin-Probleme verhältnismäßig einfach. Ferner nehmen diese Räume eine zentrale Rolle im Beweis der GAGA-Resulate ein, welche die algebro-geometrische Theorie mit der analytischen Theorie vergleichen.

## Zielgruppe

Das Seminar steht am Schnittpunkt zwischen algebraischer Geometrie, Funktionentheorie und Differentialtopologie; das Seminar ist damit für alle interessant und relevant, die sich für eines der genannten Gebiete interessieren.

## Voraussetzungen

Funktionentheorie 1 und Algebra 2, d.h. Grundkenntnisse der Theorie holomorpher Funktionen und Kenntnisse der grundlegenden Resulate der homologischen Algebra.

## Zeit und Ort der Vorbesprechung

Die Vorbesprechung findet am 30.1. um 13:45 Uhr in SR 5 statt.

## Kontakt

Marlon Kocher, [mkocher@mathi.uni-heidelberg.de](mailto:mkocher@mathi.uni-heidelberg.de), INF 205 Raum 4/231

# Garben auf komplexen Räumen

Sommersemester 2025

Prof. Dr. Otmar Venjakob  
Marlon Kocher

---

## Vortrag 1: Garben (17. April 2025)

Definition von Prägarben und Garben, Halme, Exaktheit,  $f_*$ , Exponentialsequenz, Zerlegung der Eins impliziert Exaktheit globaler Schnitte.

Literatur: [Tay02, 7.1.2, 7.1.4-7.2.2, 7.3.1-7.3.4], [GR04, A.2.1-A.2.4], [Ive86, IV.3.6]

## Vortrag 2: Komplexe Räume (24. April 2025)

Kohärente Garben, lokal geringte Räume, differenzierbare und komplexe Mannigfaltigkeiten, analytische Mengen, Rückert'scher Nullstellensatz, Reduzierung komplexer Räume.

Literatur: [GR04, A.2.1-A.2.3, A.3]

## Vortrag 3: Garbenkohomologie (8. Mai 2025)

Garbenkohomologie als abgeleiteter Funktor, Čech-Komplexe, Vergleichssätze. Prägarben dürfen großzügig ignoriert werden.

Literatur: [Tay02, 7.4.1-7.4.3], [GR04, B.2-3]

## Vortrag 4: Endliche holomorphe Abbildungen (15. Mai 2025)

Exaktheit von  $f_*$ , Vergleich der Kohomologie, Weierstrass-Division, Kohärenz von  $f_*\mathcal{F}$ . Statt mit welchen Auflösungen zu arbeiten, sollen hier injektive verwendet werden.

Literatur: [Tay02, 7.4.5], [GR04, I]

## Vortrag 5: Differentialformen (22. Mai 2025)

Differentialformen auf reellen glatten Mannigfaltigkeiten, Tangentialvektoren, Vektorfelder, äußere Ableitung, de Rham-Kohomologie, Poincaré-Lemma, Differentialformen auf komplexen Mannigfaltigkeiten.

Literatur: [GR04, II.1-II.2]

## Vortrag 6: Dolbeault-Kohomologie (5. Juni 2025)

Der Operator  $T$ , Cauchy'sche Integral-Formel, Lemma von Grothendieck, Dolbeault-Kohomologie, Vergleich von Dolbeault-Kohomologie mit der Kohomologie mit Werten in holomorphen Formen.

Literatur: [GR04, II.3-II.4]

## Vortrag 7: Heftungslemmata (12. Juni 2025)

Heftungslemmata von Cousin und Cartan, Approximationssatz von Runge.

Literatur: [GR04, III.1-III.2.1]

### **Vortrag 8: Theoreme A und B für kompakte Quader (26. Juni 2025)**

Fortsetzungssatz von Garbenepimorphismen, kohärente analytische Garben auf kompakten Quadern, Theoreme A und B.

Literatur: [GR04, III.2.2-III.3]

### **Vortrag 9: Stein'sche Räume (3. Juli 2025)**

Stein'sche Mengen, Theorem A für Stein'sche Mengen, Ausschöpfung durch kompakte Stein'sche Mengen, Verschwinden von  $H^1$ , holomorphe konvexe Hülle.

Literatur: [GR04, IV.1-IV.2.2]

### **Vortrag 10: Hauptsatz über Stein'sche Räume I (10. Juli 2025)**

Pflaster, Ausschöpfung durch Pflaster, holomorphe Konvexität, holomorph vollständige Räume.

Literatur: [GR04, IV.2.3-IV.3]

### **Vortrag 11: Hauptsatz über Stein'sche Räume II (17. Juli 2025)**

Fréchet-Räume, Topologisierung kohärenter Garben, Kompatibilitätssatz, Konvergenzsatz, Approximationssatz.

Literatur: [GR04, IV.4.1, Addendum.1, Addendum.2, IV.4.4, Addendum.4, IV.4.5]

### **Vortrag 12: Cousin-Probleme und garbentheoretische Charakterisierung Stein'scher Räume (24. Juli 2025)**

Beispiele von Stein'schen Räumen, erstes und zweites Cousin-Problem, Satz von Poincaré, garbentheoretische Charakterisierung Stein'scher Räume.

Literatur: [GR04, V.1-2, V.4.1-2]

## **Literatur**

[GR04] Hans Grauert and Reinhold Remmert. *Theory of Stein spaces*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Translated from the German by Alan Huckleberry, Reprint of the 1979 translation.

[Ive86] Birger Iversen. *Cohomology of sheaves*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[Tay02] Joseph L. Taylor. *Several complex variables with connections to algebraic geometry and Lie groups*, volume 46 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.