

Prof. Dr. Otmar Venjakob et. al.

Kato's Eulersysteme

AG Heidelberg-Mannheim

WS 07/08

Zeit: dienstags 17:45

Beginn: ????

Ort: wechselnd

Das Ziel der AG Heidelberg Mannheim im WS 07/08 besteht darin, Katos Arbeit [3] über Eulersysteme zu studieren und insbesondere folgendes Theorem zu beweisen:

Theorem 0.1. (Kato) Sei f eine Eigenspitzenform bzgl. $\Gamma_1(N)$ vom Gewicht $k \geq 2$.

- (i) Sei $r \neq \frac{k}{2}$ eine natürliche Zahl mit $1 \leq r \leq k - 1$. Dann ist die Selmergruppe $Sel(K, f, r)$ von f getwistet um r über jeder endlichen abelschen Erweiterung K von \mathbb{Q} eine endliche Gruppe.
- (ii) Sei k gerade und $\chi : G(K/\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbf{C}^\times$ ein Charakter einer endlichen abelschen Erweiterung K von \mathbb{Q} , so dass $L(f, \chi, \frac{k}{2}) \neq 0$ gilt. Dann ist der χ -Anteil $Sel(K, f, \frac{k}{2})^\chi$ von $Sel(K, f, \frac{k}{2})$ eine endliche Gruppe.

Als Folgerung erhalten wir das

Corollary 0.2. Gilt $L(E, 1) \neq 0$ für eine elliptische Kurve E/\mathbb{Q} (vom Führer N), so sind die Mordell-Weil-Gruppe $E(\mathbb{Q})$ und die p -primäre Tate-Shafarevich-Gruppe $\text{III}(E)(p)$ endlich. Ferner teilt die Ordnung von $\text{III}(E)(p)$ den L -Wert $\frac{L_N(E, 1)}{\Omega_E^+}$ der Hasse-Weil- L -Funktion von E (ohne die Eulerfaktoren der Primteiler von N).

Ferner werden wir auf dem Weg zu obigem Theorem eine (der beiden) Teilbarkeitsrelationen der Iwasawa-Hauptvermutung für f (über $\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$) zeigen.

Der Beweis des Theorems basiert auf der Konstruktion von p -adischen Eulersystemen, die von Beilinson-Elementen in K_2 einer geeigneten (affinen) Modulcurve herkommen. Der entscheidende Zusammenhang mit komplexen L -Werten und insbesondere die Nicht-Trivialität der Eulersysteme folgt aus Kato's tiefliegendem Expliziten Reziprozitätsgesetz - dies ist der technisch schwierigste Teil der Arbeit. Die obigen Resultate folgen dann aus der allgemeinen Machinerie der Eulersysteme à la Kolyvagin, Rubin, Perrin-Riou und Kato.

Da im CM-Fall (zumindest für elliptische Kurven) schon seit längerem (Teil)Ergebnisse der obigen Art bekannt sind (Coates-Wiles, Rubin, Perrin-Riou ...), wollen wir uns in der AG auf den Nicht-CM-Fall beschränken. Ggfs. werden wir uns weiterhin auf den Fall guter ordinärer Spitzenformen konzentrieren.

Neben der Originalarbeit bieten sich der Artikel von T. Scholl [7] sowie der Bourbaki-Artikel von Colmez [1] (letzterer folgt allerdings eher einem adelischen Ansatz der Eulersysteme) zur Lektüre an.

Im folgenden werden die geplanten Vorträge, die der Länge nach zwischen 90 und 180 Minuten variieren sollten, im einzelnen beschrieben (Angaben ohne Literaturverweis beziehen sich stets auf [3]):

1. Vortrag: Dies ist ein Übersichtsvortrag, evtl. wird der Fall zyklotomischer Einheiten als das einfachste Beispiel eines Eulersystems behandelt. Ferner sollen spätestens hier alle weiteren Vorträge vergeben werden.

2. Vortrag: Zuerst sollen Siegel-Einheiten ${}_c g_{\alpha,\beta}$ und $g_{\alpha,\beta}$ eingeführt werden: [3] § 1, insbesondere Prop. 1.3, vgl. auch [7] § 1.2. Anschließend sollen daraus ζ -Elemente à la Beilinson ${}_{c,d} z_{M,N} = \{c g_{\frac{1}{M},0}, d g_{0,\frac{1}{N}}\}$ und $z_{M,N} = \{g_{\frac{1}{M},0}, g_{0,\frac{1}{N}}\}$ in $K_2(Y(M,N))$ konstruiert werden: [3] § 2.1-2.4, 2.11-2.13, vgl. auch [7] Prop. 2.3.6, 2.4.3.

3. Vortrag: Nun springen wir zu § 8, um zielstrebig die p -adischen Eulersysteme ${}_{c,d} z_m^{(p)}(f, r, r', \xi, S)$ als (normalisierte) Bilder der Beilinson-Elemente unter der Chern-Charakter-Abbildung (bitte die Konstruktion dieses Charakters aus SGA kurz skizzieren) zu definieren. Allerdings werden dazu einige Notationen aus § 4.5 sowie die die Hecke-Operationen aus § 4.8-9 benötigt. Ferner muss hier auch erstmals die Darstellung $V(f)$ mit ihren wichtigsten Eigenschaften (und evtl. ihrer Konstruktion) eingeführt werden.

4. Vortrag: Der Inhalt dieses Vortrages ist § 9: zuerst soll die Bloch-Kato-Exponentialabbildung eingeführt und dann eine Kombination von Thm. 9.7 mit Thm. 6.6 in dem folgenden Sinne formuliert werden: exp_f^* sendet das Bild von ${}_{c,d} z_m^{(p)}(f, r, r', \xi, S)$ zu einem Element namens ${}_{c,d} z_m(f, r, r', \xi, S) \in S(f) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)$, welches die Eigenschaft (1) aus Thm. 6.6 hat (letzteres Element soll nicht konstruiert werden, allerdings müssen die Elemente $\delta(f, r', \xi)$ aus § 5.5 (vgl. auch § 4.7) sowie die Periodenabbildung aus 4.10 eingeführt werden). Damit erhalten wir den nötigen Zusammenhang der p -adischen Eulersysteme mit den L -Werten, um die Eulersystemmaschine in Gang zu setzen, die Beweise erfolgen dann später in Vortrag 11,12

5. Vortrag: In § 12 werden die Hauptergebnisse im Hinblick auf die Hauptvermutung von f vorgestellt (12.4-6) und dann in § 13 mittels der Eulersysteme bewiesen; dazu wird Thm. 13.4 vorerst ohne Beweis als "black box" benutzt.

6. Vortrag: An dieser Stelle kann *optional* ein Beweis von Thm. 13.4, d.h. von der allgemeinen Eulersystem-Methode gegeben werden, siehe [4, 5, 6, 2].

7. Vortrag: Absteigend von der Iwasawa-theoretischen Situation wird in § 14 das obige Theorem bewiesen. Aufgrund der Länge dieses Paragraphen, muss sich der Vortrag evtl. auf einen Spezialfall bzw. eine Skizze des Beweises beschränken. In erster Linie interessiert uns die Endlichkeitsaussage, auch wenn darüber hinaus Verfeinerungen in Richtung Tamagawa-Zahl-Vermutung zumindest als Ergebnisbericht wünschenswert wären.

Nun muss der Zusammenhang zwischen den (verschiedenen) Eulersystemen und speziellen L -Werten aufgearbeitet werden:

8. Vortrag: Zuerst müssen wir uns einen Überblick über Eisensteinreihen verschaffen: §3, vgl. auch [7] § 1.3.

9. Vortrag: Mithilfe der Eisensteinreihen werden nun in § 4 ζ -Elemente ${}_{c,d}z_{M,N}(k, r, r')$ und $z_{M,N}(k, r, r')$ im Raum der Modulformen konstruiert: wir benötigen Prop. 4.3-4 mit Beweisen in § 4.11/13.

10. Vortrag: Mit Hilfe der Rankin-Selberg-Methode sollen die zu formulierenden Thm. 2.6 und 4.6 bewiesen werden: § 7. Hierbei handelt es sich um den Zusammenhang der Bilder der ζ -Elemente (eingeführt in Vortrag 2 und 9) jeweils unter der Regulator- bzw. Periodenabbildung mit Operator-wertigen ζ -Funktionen, die wiederum in engem Verhältnis zu den komplexen L -Funktionen stehen.

11. Vortrag: Das Ziel diesen Vortrags ist der Beweis von Thm. 6.6: § 5,6, d.h. der Verbindung zwischen den Eulersystemen in K_2 bzw. im Raum der Modulformen mit den speziellen L -Werten.

12. Vortrag: Zuletzt soll Kato's Explizites Reziprozitätsgesetz (§10) diskutiert werden: es stellt eine Beziehung zwischen den p -adischen Eulersystemen und den Eulersystemen von Modulformen und damit aufgrund von Thm. 6.6 auch zu den speziellen L -Werten, her. Insbesondere wird damit auch Thm. 9.7 bewiesen und die gesamte Beweiskette für das obige Theorem geschlossen. Allerdings stellt die Kommutativität von (10.9.5) eine enorme technische Herausforderung (§11) dar, auf die wir womöglich verzichten müssen.

Wahrscheinlich werden ohnehin nicht alle Vorträge im WS gehalten werden können: gerade bei den Vorträgen 8-12 muss evtl. eine Auswahl getroffen werden. Andererseits kann bei Bedarf das Programm mühelos auf 2 Semester ausgedehnt werden, indem § 11 (vgl. auch [1, § 2]) ausführlich besprochen wird oder noch die p -adische Birch und Swinnerton-Dyer Vermutung diskutiert wird: hierzu müßten die zu f assoziierten p -adischen L -Funktionen eingeführt und mittels der Methode von Perrin-Riou mit Kato's Eulersystemen in Verbindung gebracht werden (Kapitel IV).

REFERENCES

1. P. Colmez, *La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p -adique*, Astérisque (2004), no. 294, ix, 251–319. (document)
2. K. Kato, *Euler systems, Iwasawa theory, and Selmer groups*, Kodai Math. J. **22** (1999), no. 3, 313–372. (document)
3. ———, *p -adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms*, Astérisque (2004), no. 295, ix, 117–290, Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques. III. (document)
4. B. Perrin-Riou, *Travaux de Kolyvagin et Rubin*, Astérisque (1990), no. 189-190, Exp. No. 717, 69–106, Séminaire Bourbaki, Vol. 1989/90. (document)
5. ———, *Systemes d'Euler p -adiques et théorie d'Iwasawa*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **48** (1998), no. 5, 1231–1307. (document)

6. K. Rubin, *Euler systems*, Annals of Mathematics Studies, vol. 147, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000, , Hermann Weyl Lectures. The Institute for Advanced Study. (document)
7. A. J. Scholl, *An introduction to Kato's Euler systems*, Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 254, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, pp. 379–460. (document)