Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique

Seminar im Sommersemester 2019

Prof. Dr. O. Venjakob
O. Thomas

Sei X^{an} ein topologischer Raum, der lokal als Nullstellenmenge einer Familie holomorpher Funktionen beschrieben werden kann. Lässt sich X^{an} dann auch lokal als Nullstellenmenge einer Familie von Polynomen beschreiben? Diese Frage soll Leitmotiv unseres Seminars sein, in dem konkret folgende Objekte betrachtet werden.

Ist X ein Schema von endlichem Typ über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, so kann man sich (die abgeschlossenen Punkte von) X lokal als Lösungsmenge einiger Polynome im $\mathbb{C}^n$ vorstellen. X trägt damit zwei Topologien: die algebraische Zariski-Topologie einerseits, weiterhin mit X bezeichnet, und die analytische Topologie durch lokal definierte Einbettungen in $\mathbb{C}^n$ andererseits, welche wir mit X^{an} bezeichnen. Während X eine Strukturgarbe regulärer Funktionen $\mathcal{O}_X$ trägt, kann man auf X^{an} eine Strukturgarbe $\mathcal{H}_{X^{\mathrm{an}}}$ holomorpher Funktionen definieren. Die Zuordnung $(X, \mathcal{O}_X) \mapsto (X^{\mathrm{an}}, \mathcal{H}_{X^{\mathrm{an}}})$ ist funktoriell und setzt sich auch auf Modulgarben über $\mathcal{O}_X$ fort. In *Géométrie algébrique et géométrie analytique* untersucht Serre diesen Analytifizierungsfunktor; die Resultate sind seither als *GAGA* bekannt. Die drei wichtigsten Theoreme wurden für projektive Schemata von endlichem Typ über den komplexen Zahlen gezeigt und lauten wie folgt:

(1) Ist $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul, so ist $\mathcal{F}^{\mathrm{an}}$ ein kohärenter $\mathcal{H}_{X^{\mathrm{an}}}$-Modul und es gibt für alle i natürliche Isomorphismen
$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(X^{\mathrm{an}}, \mathcal{F}^{\mathrm{an}}).$$
(2) Der Analytifizierungsfunktor von kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln zu kohärenten $\mathcal{H}_{X^{\mathrm{an}}}$-Moduln ist volltreu.
(3) Der Analytifizierungsfunktor ist auch wesentlich surjektiv und induziert somit eine Äquivalenz von Kategorien zwischen kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln und kohärenten $\mathcal{H}_{X^{\mathrm{an}}}$-Moduln.

Im Seminar werden wir zuerst einige Resultate aus der komplexen Geometrie wiederholen, um zu zeigen, dass Kohomologiegruppen kompakter komplexer Räume mit Koeffizienten in kohärenten Garben endlichdimensional sind. Anschließend wenden wir uns dem Analytifizierungsfunktor zu und zeigen Serres drei GAGA-Theoreme. Zum Abschluss werden wir noch einige Anwendungen diskutieren, u. a. die eingangs erwähnte Fragestellung.

Voraussetzungen

Algebraische Geometrie 1. Wird die Vorlesung Algebraische Geometrie 2 nicht parallel zum Seminar besucht, so sind im Laufe des Semesters ferner Kenntnisse nötig, die folgenden Abschnitten in Hartshornes *Algebraic Geometry* entsprechen: Sheaves of Modules, Projective Morphisms, Cohomology of Sheaves, The Cohomology of Projective Space.

Zeit und Ort

Donnerstags, 14-16h in SR 3. Vorbesprechung am 7.2.19 um 14:00 (s. t.) in INF 205 SR 3.

Kontakt

Oliver Thomas • INF 205 Raum 3/303 • https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~othomas/