Seminar „Algebraische K-Theorie“

Wintersemester 2017/18

PD Dr. F. Januszewski
O. Thomas

Algebraische K-Theorie steht an einem spannenden Schnittpunkt mathematischer Disziplinen: Die Konstruktionen sind topologischer, die Objekte algebraischer und viele Theoreme arithmetischer und geometrischer Natur.

Zu einem (nicht zwingend kommutativen) Ring R werden die algebraischen K-Gruppen $(K_n(R))_{n\in\mathbb{N}_0}$ gebildet. Während die korrekte Definition der Gruppen K_0, K_1 und K_2 klassisch bekannt ist, gab es für höhere K-Gruppen mehrere Kandidaten, sodass man heute vor allem zwischen algebraischer K-Theorie und Milnor-K-Theorie unterscheidet. Im Seminar werden wir Quillens sogenannte „Q-Konstruktion“ nachvollziehen, welche gut geeignet ist, abstrakte Theoreme zu zeigen, mit der sich konkrete Berechnungen aber sehr schwierig gestalten. Diese Konstruktion macht aus einer Kategorie $\mathbf{X}$ einen CW-Komplex $BQ\mathbf{X}$. K-Theorie studiert dann die Homotopiegruppen dieses Raumes: $K_\bullet(\mathbf{X}) = \pi_{\bullet+1}(BQ\mathbf{X})$ und schließlich $K_\bullet(R) = K_\bullet(\text{endlich erzeugte projektive } R\text{-Moduln})$.

Diese unhandlich erscheinende Definition führt im Einzelfall zu wohlbekannten Objekten: Für Zahl-Ringe ist etwa K_0 durch die Idealklassengruppe und K_1 durch die Einheitengruppe bestimmt. Tatsächlich ist die höhere K-Theorie der ganzen Zahlen aber nicht nur unbekannt, sondern auch Gegenstand zahlentheoretischer Vermutungen: Es gibt genau dann eine Primzahl p, welche die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\zeta_p + \zeta_p^{-1})$ teilt, wenn es eine Zahl n mit $K_{4n}(\mathbb{Z}) \neq 0$ gibt. Ob es eine solche Primzahl gibt, ist Gegenstand der Kummer-Vandiver-Vermutung. Andere Vermutungen setzen die Werte gewisser L-Funktionen mit algebraischen K-Gruppen in Verbindung.

Gleichzeitig sind K-Gruppen aber funktoriell. Für den Spezialfall eines Dedekind-Ringes $\mathcal{O}$ mit Quotientenkörper K und Restklassenkörpern an maximalen Idealen $\mathcal{O}/\mathfrak{m}$ heißt das, dass es einen Zusammenhang zwischen $K_\bullet(\mathcal{O}), K_\bullet(K)$ und $K_\bullet(\mathcal{O}/\mathfrak{m})$ gibt, welcher durch die sogenannte *Lokalisierungssequenz* gegeben ist, welches Ziel des Seminars sein wird. Da die K-Theorie endlicher Körper vollständig berechnet ist, ergibt sich so ein Zusammenhang zwischen der K-Theorie von Zahlkörpern und der K-Theorie ihrer Ganzheitsringe.

Die im Seminar vorgestellten Techniken entstammen zum Großteil der abstrakten Homotopietheorie, welche Einzug in viele Bereiche der Mathematik gehalten haben. Die Theoreme, die wir im Verlauf des Seminars zeigen werden, veranschaulichen nicht nur den Erfolg homotopietheoretischer Methoden, sondern sind auch grundlegende Resultate der algebraischen K-Theorie und finden vielerorts Anwendung.

Voraussetzungen

Algebra 2. Algebraische Topologie 1 von Vorteil, aber nicht erforderlich.

Zeit und Ort

Dienstags, 14-16h in SR 6. Vorbesprechung am 10.10.2017 um 13:00 Uhr in INF 205 SR 6.

Kontakt

Oliver Thomas • INF 205 Raum 3/303 • https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~othomas/