Übungen zu L-Funktionen und ϵ-Konstanten 1

Wintersemester 2016

Prof. Dr. O. Venjakob — Blatt 7, Ausarbeitung 2

O. Thomas — Abgabe bis 13.01.2017, 9:00 Uhr

Aufgabe 25. *(5+5+3=13 Punkte.)*
Sei $L|K$ eine beliebige Erweiterung von Zahlkörpern vom Grad n. Für eine Teilmenge S der Primstellen von K bezeichne mit $\delta(S)$ den Grenzwert $\delta(S) = \lim_{s\to 1^+}(\sum_{\mathfrak{p}\in S} \mathfrak{N}\mathfrak{p}^{-s})/(\log(1/(s-1)))$.

(i) Folgere aus Aufgabe 16, dass wenn $L|K$ galoissch ist und $\sigma \in G(L|K)$ so ist $\delta(\{\mathfrak{p} \mid \mathrm{Frob}_\mathfrak{p} = \langle\sigma\rangle\}) = \#\langle\sigma\rangle/n$, wenn $\langle\sigma\rangle$ die von σ erzeugte Konjugationsklasse bezeichnet.

(ii) $\delta(\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ voll zerlegt in } L\}) \geqslant 1/n$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $L|K$ normal ist.

(iii) Ist $f \in \mathbb{Z}[X]$ normiert und zerfällt f modulo fast allen Primzahlen in Linearfaktoren, so zerfällt f bereits in $\mathbb{Z}[X]$ in Linearfaktoren.

Aufgabe 26. *(8 Punkte.)*
Sei K ein Zahlkörper und $\mathfrak{m}$ ein ganzes Ideal von K. Dann sind die (stetigen) Größencharaktere $\omega\colon \mathbf{I}_K/K^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ vom Exponenten δ mit Führer $\mathfrak{f}|\mathfrak{m}$ in bis auf Approximation expliziter Eins-zu-Eins-Korrespondenz mit den Charakteren $\widetilde{\omega}\colon J_\mathfrak{m} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$, für die es gewisse Zahlen $w_v \in \mathbb{Z}$ und $t_v \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $\alpha \in K, \alpha \equiv 1 \mod \mathfrak{m}$ gilt:

$$\widetilde{\omega}((\alpha)) = \prod_{v\in S_\infty} \left(\frac{\sigma_v(\alpha)}{|\sigma_v(\alpha)|}\right)^{w_v} |\sigma_v(\alpha)|^{-n_v(\delta+it_v)}.$$

Hierbei bezeichne $J_\mathfrak{m}$ die freie abelsche Gruppe auf denjenigen Primidealen, welche nicht $\mathfrak{m}$ teilen. Ferner sei σ_v eine fest gewählte zur Stelle v korrespondierenden Einbettung $\sigma_v\colon K \longrightarrow K_v$, $n_v = 1$ für $K_v = \mathbb{R}$ und $n_v = 2$ für $K_v = \mathbb{C}$, d. h. $|\alpha|_v = |\sigma_v(\alpha)|^{n_v}$.

Aufgabe 27. *(3+2+2+2+2+9=20 Punkte.)*
Sei $K = \mathbb{Q}(i)$ und $\mathfrak{q}$ das eindeutige Primideal über 2.

(i) Ist $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ eine Primstelle von K und $\beta \in \mathcal{O}_K$ teilerfremd zu $\mathfrak{p}$, so gibt es ein eindeutiges $\left(\frac{\beta}{\mathfrak{p}}\right)_4 \in \mu_4$ mit $\left(\frac{\beta}{\mathfrak{p}}\right)_4 \equiv \beta^{\frac{\mathfrak{N}\mathfrak{p}-1}{4}} \mod \mathfrak{p}$.

(ii) 113 ist in K voll zerlegt.

Ist $\mathfrak{a}$ ein gebrochenes Ideal teilerfremd zu 226, so definiere $\widetilde{\omega}(\mathfrak{a}) = \alpha \prod_\mathfrak{p} \left(\frac{226}{\mathfrak{p}}\right)_4^{v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})}$, wobei α der eindeutige Erzeuger von $\mathfrak{a}$ mit $\alpha \equiv 1 \mod \mathfrak{q}^3$ sei.

(iii) Benutze quartische Reziprozität um zu zeigen, dass wenn $\alpha \equiv 1 \mod 2^3 \cdot 113$, dann ist $\widetilde{\omega}((\alpha)) = \alpha$.

(iv) Beschreibe im Stil von Aufgabe 26 den von $\widetilde{\omega}$ induzierten Größencharakter $\omega\colon \mathbf{I}_K/K^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ und seine lokalen Komponenten an endlichen Stellen explizit bis auf Approximation.

(v) Bestimme $\omega_\infty\colon \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ explizit.

(vi) Bestimme die lokalen Epsilon-Faktoren von ω an den Stellen $\mathfrak{q}, 3$ und ∞.

Aufgabe 28. *(3+6=9 Punkte.)*
Setze $L = \mathbb{Q}_5(\sqrt[4]{5})$. Sei $\omega\colon G(L|\mathbb{Q}_5) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ ein beliebiger Charakter der Ordnung vier.

(i) Bestimme die zu $L|\mathbb{Q}_5$ korrespondierende Normuntergruppe $N_{L|\mathbb{Q}_5}L^\times$ von $\mathbb{Q}_5^\times$.

(ii) Bestimme den lokalen Epsilon-Faktor von $\omega\colon \mathbb{Q}_5^\times \longrightarrow \mathbb{Q}_5^\times/N_{L|\mathbb{Q}_5}L^\times \cong G(L|\mathbb{Q}_5) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$.