Übungen zu L-Funktionen und ϵ-Konstanten 1

Wintersemester 2016

Prof. Dr. O. Venjakob
O. Thomas

Blatt 6
keine Abgabe, Besprechung am 21.12.

Aufgabe 21.
Für $t > 0$ definiere $\Theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-\pi t n^2)$.

(i) Diskutiere Konvergenz und Analytizität von Θ.

(ii) Zeige, dass Θ eine Funktionalgleichung erfüllt.

Sei von nun an K_ν ein nicht-archimedischer lokaler Körper mit Haarmaß μ (auf der additiven Gruppe), $\omega\colon K_\nu^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ ein Quasi-Charakter und $\psi\colon K_\nu \longrightarrow S^1$ ein beliebiger nicht-trivialer Charakter. Für $f\colon K_\nu \longrightarrow \mathbb{C}$ verstehen wir die Fouriertransformierte $\widehat{f}$ bezüglich ψ^{-1} und μ, d. h. $\widehat{f}(x) = \int_{K_\nu} f(y)\psi(xy)\mathrm{d}\mu(x)$. Wir definieren ferner $L_\nu(\omega) = (1-\omega(\pi_\nu))^{-1}$ falls ω unverzweigt und mit einem beliebigen Uniformisierer π_ν und $L_\nu(\omega) = 1$ sonst. Definiere nun den lokalen Epsilon-Faktor

$$\epsilon(\omega,\psi,\mu) = \frac{\zeta(\widehat{g},\breve{\omega})}{\zeta(g,\omega)}\frac{L_\nu(\omega)}{L_\nu(\breve{\omega})} \in \mathbb{C}^\times$$

für eine beliebige Funktion $g \in A(K_\nu)$ mit $\zeta(g,\omega) \neq 0$.

Aufgabe 22.

(i) Wieso ist ϵ zwar abhängig von ω, ψ und μ, nicht aber von $\mu^\times$, einem Haarmaß auf $K_\nu^\times$?

(ii) Wie hängen $\epsilon(\omega,\psi,\mu)$ und $\rho(\omega)$ zusammen?

(iii) $\epsilon(\omega,\psi,r\cdot\mu) = r\cdot\epsilon(\omega,\psi,\mu)$ für alle $r > 0$.

(iv) $\epsilon(\omega, x\mapsto\psi(ax),\mu) = \omega(a)|a|^{-1}\epsilon(\omega,\psi,\mu)$ für $a \in K_\nu^\times$.

Aufgabe 23.
Sei $\mathcal{O}$ der Bewertungsring von K_ν. Sei n die größte ganze Zahl mit $\psi(\pi^{-n}\mathcal{O}) = 1$ (Existenz?), e der Exponent des Führers von ω und c ein beliebiges Element von $K_\nu^\times$ mit $\nu(c) = n + e$.

(i) $\epsilon(\omega,\psi,\mu) = |c|^{-1}\omega(c)\mu(\mathcal{O})$, falls ω unverzweigt ist.

(ii) $\epsilon(\omega,\psi,\mu) = \int_{c^{-1}\mathcal{O}^\times} \omega(x^{-1})\psi(x)\mathrm{d}\mu(x)$, falls ω verzweigt.

(iii) Ist ω' ein unverzweigter Quasicharakter, so ist $\epsilon(\omega\cdot\omega',\psi,\mu) = \epsilon(\omega,\psi,\mu)\omega'(c)$.

Aufgabe 24.
Bestimme den lokalen Epsilon-Faktor für den Quasi-Charakter $\chi_{\mathfrak{q}}$ aus Aufgabe 14.(iv).