Übungen zu L-Funktionen und ϵ-Konstanten 1

Wintersemester 2016

Prof. Dr. O. Venjakob
O. Thomas

Blatt 5
keine Abgabe, Besprechung am 14.12.

Aufgabe 17.
Sei G eine lokal-kompakte abelsche Gruppe mit Haarmaß μ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht-leer und offen. Seien ferner $f\colon G \times U \longrightarrow \mathbb{C}, |\phi| \in L^1(G)$ derart, dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. Für alle $g \in G$ ist $f(g, -)$ stetig differenzierbar auf U.
2. Für alle $\mathbf{x} \in U$ ist $f(-, \mathbf{x}) \in L^1(G)$.
3. $|\frac{\partial f}{\partial x_i}(g, \mathbf{x})| \leq |\phi(g)|$ für alle $g, \mathbf{x}, i$.

Setze $F(\mathbf{x}) = \int f(g, \mathbf{x}) \mathrm{d}\mu(g)$ für $\mathbf{x} \in U$.

(i) F ist stetig differenzierbar und $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \int \frac{\partial f}{\partial x_i}(g, \mathbf{x}) \mathrm{d}\mu(g)$.
(ii) Ist darüber hinaus $U \subseteq \mathbb{C}$ und sind alle $f(g, -)$ holomorph, so ist auch F holomorph.
(iii) Lokale Zeta-Funktionen sind auf $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0\}$ holomorph.

Aufgabe 18.
Verifiziere die Selbstdualität der Maße λ_v auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Aufgabe 19.
Sei G LCA und $H \leq G$ eine abgeschlossene Untergruppe mit jeweiligen Haarmaßen μ_G, μ_H und $\mu_{G/H}$ das induzierte Haarmaß auf G/H. Seien $\widehat{\mu}_G, \widehat{\mu}_H, \widehat{\mu}_{G/H}$ die jeweils dualen Maße auf $\widehat{G}, \widehat{H}$ und $\widehat{G/H}$. Dann ist $\widehat{\mu}_H$ das induzierte Maß von $\widehat{\mu}_G$ und $\widehat{\mu}_{G/H}$.

Aufgabe 20.
Sei G LCA und $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Dann ist $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$.