Übungen zu L-Funktionen und ϵ-Konstanten 1

Wintersemester 2016

Prof. Dr. O. Venjakob
O. Thomas

Blatt 4, Ausarbeitung 1
Abgabe bis 2.12., 9:00 Uhr.

Aufgabe 13. *(4+2=6 Punkte.)*
Sei K ein Zahlkörper, $\mathbf{I} = \mathbf{I}_K$ die Idelegruppe von K, $\mathbf{I}^1 \leq \mathbf{I}$ die Idele von Betrag 1 und $\chi\colon \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ ein stetiger Homomorphismus.

(i) Ist $\chi(K^\times \mathbf{I}^1) = 1$, so existiert ein $s \in \mathbb{C}$ mit $\chi = |-|^s$.

(ii) Ist $\chi(K^\times) = 1$, so ist $\chi(\mathbf{I}^1) \subseteq S^1$ und es existiert ein $\sigma \in \mathbb{R}$ mit $|\chi(\mathbf{x})| = |\mathbf{x}|^\sigma$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbf{I}$.

Aufgabe 14. *(2+2+2+2+6=14 Punkte.)*
Sei $K = \mathbb{Q}(i)$ und $\mathfrak{q}$ die eindeutige Primstelle von K über 2.

(i) Für jedes ganze zu $\mathfrak{q}$ teilerfremde Ideal $\mathfrak{a}$ von K gibt es einen eindeutigen Erzeuger $\psi(\mathfrak{a}) \in \mathcal{O}_K$ mit $\psi(\mathfrak{a}) \equiv 1 \mod \mathfrak{q}^3$.

(ii) $\chi\colon \mathbf{I}_K \longrightarrow \mathbb{C}^\times, \mathbf{x} \mapsto \psi(\mathbf{x}\xi)\mathbf{x}_\infty^{-1}\xi^{-1}$ mit $\xi \in K^\times$ derart, dass $\mathbf{x}_\mathfrak{q}\xi \equiv 1 \mod \mathfrak{q}^3$, ist ein wohldefinierter stetiger Homomorphismus. (Erkläre zuerst, was $\psi(\mathbf{x}\xi)$ sein soll!)

(iii) $\chi(K^\times) = 1$ und $\chi(U_\mathfrak{p}) = 1$ für alle endlichen Primstellen $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$. („$\chi$ ist ein außerhalb von $\{\mathfrak{p}\}$ unverzweigter Heckecharakter.“)

(iv) Beschreibe $\chi_\mathfrak{q}\colon K_\mathfrak{q} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$. Zeige insbesondere, dass $\chi(U_\mathfrak{q}^{(3)}) = 1$ und $\chi(U_\mathfrak{q}^{(2)}) \neq 1$. („$\chi$ hat Führer $\mathfrak{q}^3$.“)

(v) Mit $\chi'(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x})/|\chi(\mathbf{x})|$ ist χ' von endlicher Ordnung und damit insbesondere ein Galois-Charakter (vgl. Aufgabe 24 in AZT 2). Zu welcher Körpererweiterung $L|K$ korrespondiert χ'?

Aufgabe 15. *(3+3+6=12 Punkte.)*
Es sei $K|\mathbb{Q}$ eine endliche Erweiterung und $\chi\colon \mathbf{I}_K/K^\times \longrightarrow S^1$ ein stetiger Charakter. Ferner sei $L|K$ endlich und abelsch mit Galois-Gruppe G.

(i) Präzisiere die Definition $L(\chi, s) = \sum_{0\neq\mathfrak{a} \text{ Ideal in } \mathcal{O}_K} \chi(\mathfrak{a})\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{-s}$.

(ii) $L(\chi, s) = \prod_{\mathfrak{p} \text{ prim}} (1 - \chi(\mathfrak{p})\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$.

(iii) $\zeta_L(s) = \prod_{\chi\in\widehat{G}} L(\chi, s)$. (Erkläre dazu zuerst $\chi(\mathfrak{p})$ in diesem Kontext. Besondere Vorsicht ist bei verzweigenden Primstellen geboten. Auch eine explizite Bestimmung von $\widehat{G}$ wird sich als hilfreich erweisen.)

Aufgabe 16. *(2+2+3+5+2+4=18 Punkte.)*
In dieser Aufgabe dürfen die im Einführungskapitel erwähnten Aussagen verwendet werden.

Sei $L|K$ eine endliche abelsche Erweiterung von Zahlkörpern und $G = G(L|K)$ mit dem Zählmaß versehen. Für $\sigma \in G$ sei $P_{L|K}(\sigma) = \{\mathfrak{p} \text{ Primstelle von } K \mid \mathrm{Frob}_\mathfrak{p} = \sigma\}$.

(i) Bestimme das Maß $\widehat{\mu}$ auf $\widehat{G}$, sodass Fourier-Inversion gilt.

(ii) $x \mapsto \int \chi(\sigma^{-1}x)\mathrm{d}\widehat{\mu}(\chi)$ ist die charakteristische Funktion auf $\{\sigma\}$.

(iii) $\#G \cdot \sum_{\mathfrak{p}\in P_{L|K}(\sigma)} \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-s} = \sum_{\chi\in\widehat{G}} \chi(\sigma^{-1}) \sum_{\mathfrak{p} \text{ prim}} \chi(\mathfrak{p})\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-s}$.

(iv) $\lim_{s\to 1^+}(\sum_{\mathfrak{p} \text{ prim}} \chi(\mathfrak{p})\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-s})/\log(1/(s-1))$ ist 1 falls χ der triviale Charakter ist und 0 sonst.

(v) $\lim_{s\to 1^+}(\sum_{\mathfrak{p}\in P_{L|K}(\sigma)} \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-s})/\log(1/(s-1)) = 1/\#G$. („Čebotarevscher Dichtigkeitssatz im abelschen Fall.“)

(vi) Folgere den Dirichletschen Primzahlsatz: Sind a, m teilerfremde natürliche Zahlen, so existieren unendlich viele Primzahlen $p \equiv a \mod m$.