Übungen zu L-Funktionen und ϵ-Konstanten 1

Wintersemester 2016

Prof. Dr. O. Venjakob
O. Thomas

Blatt 3
keine Abgabe, Besprechung am 16.11.

Aufgabe 9.
Seien Γ und G lokal-kompakte hausdorffsche Gruppen und μ ein Haarmaß auf G. Sei ferner $\varrho\colon \Gamma \times G \longrightarrow G$ eine solche stetige Gruppenoperation, dass

$$g\varrho(\gamma, h) = \varrho(\gamma, gh)$$

für alle $g, h \in G$ und $\gamma \in \Gamma$ gilt. Dann existiert ein eindeutiger stetiger Gruppenhomomorphismus $\psi\colon \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$, sodass

$$\varrho(\gamma, -)_*\mu = \psi(\gamma)\mu$$

für alle $\gamma \in \Gamma$.

Aufgabe 10.
Sei G eine lokal-kompakte hausdorffsche Gruppe, $\varrho\colon G \times G \longrightarrow G, (\gamma, g) \mapsto g\gamma^{-1}$ und $\Delta_G\colon G \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ der stetige Gruppenhomomorphismus aus Aufgabe 9.

(i) $\Delta_G^{-1}\mathrm{d}\mu$ induziert ein rechts-invariantes Haarmaß auf G.

(ii) $\int f(g^{-1})\Delta_G(g^{-1})\mathrm{d}\mu(g) = \int f(g)\mathrm{d}\mu(g)$ für $f \in L^1(G)$.

(iii) Ist G abelsch oder kompakt, so ist $\Delta_G = 1$.

Aufgabe 11.
Seien Γ und G lokal-kompakte hausdorffsche Gruppen und μ ein Haarmaß auf G. Sei $\mathrm{mod}_G(\phi)$ die Zahl in $\mathbb{R}_{>0}$ mit $\phi_*\mu = \mathrm{mod}_G(\phi)^{-1}\mu$ für Automorphismen (von topologischen Gruppen) ϕ von G.

(i) Wieso definiert man $\phi_*\mu = \mathrm{mod}_G(\phi)^{-1}\mu$ statt $\phi_*\mu = \mathrm{mod}_G(\phi)\mu$?

(ii) mod_G ist multiplikativ.

(iii) Sei $\mathrm{Int}_g\colon G \longrightarrow G$ die Konjugation mit $g \in G$. Dann ist $\mathrm{mod}_G(\mathrm{Int}_g) = \Delta_G(g^{-1})$.

(iv) Sei $\varrho\colon \Gamma \times G \longrightarrow G$ eine stetige Gruppenoperation durch Automorphismen. Dann ist $\mathrm{mod}_G\colon \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, \gamma \mapsto \mathrm{mod}_G(\varrho(\gamma, -))$ stetig.

Aufgabe 12.

(i) Sei $G = N \rtimes_\phi H$ mit lokal-kompakten hausdorffschen Gruppen N und H. Konstruiere aus mod_N und Haarmaßen auf N und H ein Haarmaß auf G.

(ii) Für $G = \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}^\times$ ist die Funktion Δ_G aus Aufgabe 10 nicht trivial.