Übungen zu L-Funktionen und ϵ-Konstanten 1

Wintersemester 2016

Prof. Dr. O. Venjakob
O. Thomas

Blatt 1
keine Abgabe, Besprechung am 2.11.

Aufgabe 1.
Ist H eine lokal-kompakte Untergruppe einer hausdorffschen Gruppe G, so ist H in G abgeschlossen.

Aufgabe 2.
Für $\mathrm{Exp}\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1, t \mapsto \exp(2\pi i t)$ und $0 < \epsilon \leq 1$ setze $N(\epsilon) = \mathrm{Exp}((-\epsilon/3, \epsilon/3)) \subseteq S^1$.

(i) Male ein Bild.

(ii) Für $r \geq 1, q \geq 0$ folgt aus

$$N(1/r) \cap N(1/(r+1)) \cdot \mathrm{Exp}(q/(r+1)) \neq \varnothing,$$

dass $q = 0$.

(iii) Sind $z, z^2, \ldots, z^r \in N(1)$, so ist $z \in N(1/r)$.

(iv) Ist G eine Gruppe, $e \in U \subseteq G$ eine Teilmenge und $\chi\colon G \longrightarrow S^1$ ein Gruppenhomomorphismus mit $\chi(U^r) = \chi(U \cdot U \cdot \ldots \cdot U) \subseteq N(1)$, so ist $\chi(U) \subseteq N(1/r)$.

Aufgabe 3.
Zeige folgende Aussagen ohne Pontryagin-Dualität.

(i) $\widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

(ii) $\widehat{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}$.

(iii) $\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$.

Aufgabe 4.
Ist G proendlich, so ist

$$\widehat{G} \cong \varinjlim_{U} \mathrm{Hom}(G/U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

wobei U die offenen Normalteiler von G durchläuft.