Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie 2
Sommersemester 2016

Prof. Dr. O. Venjakob
O. Thomas

Blatt 9
keine Abgabe, Besprechung am 20.7.

Aufgabe 33. *(Klassenzahlabschätzungen I.)*
Es sei $L|\mathbb{Q}$ quadratisch.

(i) Ist $E|L$ quadratisch und unverzweigt, so ist $E|\mathbb{Q}$ galoissch.

(ii) In diesem Fall ist $G(E|\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

(iii) Schätze die Klassenzahl von L nach oben ab.

Aufgabe 34. *(Klassenzahlabschätzungen II.)*
Sei L ein Zahlkörper und S eine endliche Stellenmenge von L, die alle unendlichen Stellen enthält. Setze $I_\infty = \prod_{\mathfrak{P}\in S_\infty} L_{\mathfrak{P}}^\times$, $U_S = \prod_{\mathfrak{P}\in S\setminus S_\infty} U_{\mathfrak{P}}$ und $U_{L,S} = \prod_{\mathfrak{P}\in S}\{1\} \times \prod_{\mathfrak{P}\notin S} U_{\mathfrak{P}}$. Dann ist folgende Sequenz exakt:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_L^\times \longrightarrow I_\infty \times U_S \longrightarrow I_L/L^\times U_{L,S} \longrightarrow \mathrm{Cl}_L \longrightarrow 0.$$

Aufgabe 35. *(Klassenzahlabschätzungen III.)*
Sei p prim, $L|K$ eine zyklische p-Erweiterung von Zahlkörpern mit Galois-Gruppe G und $S = \mathrm{Ram}(L|K) \cup S_\infty$ die Menge der unendlichen und der in L verzweigenden Stellen von K. Für eine abelsche Gruppe A setze $d_p(A) = \dim_{\mathbb{F}_p} A/p$.

(i) $d_p(\widehat{H}^0(G, (I_\infty \times U_{S(L)})/\mathcal{O}_L^\times)) \geq d_p(\widehat{H}^0(G, I_\infty \times U_{S(L)})) - d_p(\widehat{H}^0(G, \mathcal{O}_L^\times))$.

(ii) $\widehat{H}^i(G, I_L/L^\times U_{L,S(L)}) = \widehat{H}^i(G, C_L)$ für $i \in \{-1, 0\}$.

(iii) $d_p(\widehat{H}^0(G, \mathcal{O}_L^\times)) \leq \#S_\infty(K) - 1 + \delta$, wobei $\delta = 1$ falls $\mu_p \subseteq K$ und $\delta = 0$ sonst.

Aufgabe 36. *(Klassenzahlabschätzungen IV.)*
Sei p prim, $L|K$ eine zyklische p-Erweiterung von Zahlkörpern mit Galois-Gruppe G und $S = \mathrm{Ram}(L|K) \cup S_\infty$ die Menge der unendlichen und der in L verzweigenden Stellen von K.

(i) Dann ist

$$\dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Cl}_L/p \geq \#(S \setminus S_\infty)(K) - r_1(K) - r_2(K) - \delta(K) + r_1'(K),$$

wobei $\delta = 1$ falls $\mu_p \subseteq K$ und $\delta = 0$ sonst, r_1 die Zahl reeller Stellen, r_2 die Zahl von (Paaren von) komplexen Stellen und r_1' die Zahl von reellen Stellen bezeichnet, die in L komplex werden.

(ii) Sei $L|\mathbb{Q}$ quadratisch. Schätze die Klassenzahl von L nach unten ab.