Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie 2

Sommersemester 2016

Prof. Dr. O. Venjakob — Blatt 6, Ausarbeitung 2
O. Thomas — Abgabe bis 24.6., 9.00 Uhr

Aufgabe 21. *(4+3 Punkte.)*
Es sei K der Zerfällungskörper von $X^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$ und $K_p = K\mathbb{Q}_p$.

(i) Bestimme $G(K_p|\mathbb{Q}_p), e(K_p|\mathbb{Q}_p)$ und $f(K_p|\mathbb{Q}_p)$ für $p \in \{2, 3, 5, 7, 31\}$.

(ii) Beschreibe $N_{K_p|\mathbb{Q}_p} K_p^\times \leq \mathbb{Q}_p^\times$ für $p \in \{5, 7, 31\}$.

Aufgabe 22. *(5+5 Punkte.)*
Für einen Zahlkörper K nennen wir seine maximal abelsche und überall unverzweigte Erweiterung seinen *Hilbertschen Klassenkörper*. Wir bezeichnen ihn mit $H(K)$.

(i) Zeige mit Klassenkörpertheorie, dass $G(H(K)|K) \cong \mathrm{Cl}_K$.

(ii) Zeige mit Klassenkörpertheorie, dass im Hilbertschen Klassenkörper von K jedes Ideal von $\mathcal{O}_K$ ein Hauptideal wird.

(Ohne Beweis kann dabei folgender Satz von Furtwängler verwendet werden: Ist G eine endliche Gruppe, so ist die Verlagerung $G^{\mathrm{ab}} \longrightarrow [G, G]^{\mathrm{ab}}$ trivial.)

Aufgabe 23. *(4+3+4+4+3+4 Punkte.)*

(i) Für $L = \mathbb{Q}_p(\mu_{p^n})$ ist $N_{L|\mathbb{Q}_p} L^\times = (p) \times U_{\mathbb{Q}_p}^{(n)}$.

(Folgere aus $\exp\colon p^k\mathbb{Z}_p \longrightarrow U_{\mathbb{Q}_p}^{(k)}$, dass aus hohen Einheiten hohe Wurzeln gezogen werden können, was $U_{\mathbb{Q}_p}^{(n)} \leq N_{L|\mathbb{Q}_p} L^\times$ zeigt. Lokale Klassenkörpertheorie zeigt dann den Rest. Bei $p = 2$ ist besondere Vorsicht geboten.)

(ii) Folgere mittels lokaler Klassenkörpertheorie, dass die maximale abelsche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ gerade $\mathbb{Q}_p(\mu)$ ist, wobei μ die Menge aller Einheitswurzeln bezeichnet.

(iii) Folgere hieraus, dass die maximale abelsche Erweiterung von $\mathbb{Q}$ gerade $\mathbb{Q}(\mu)$ ist.

(Ist $K|\mathbb{Q}$ abelsch, so existieren $n_p \in \mathbb{N}$ mit $K_p = K\mathbb{Q}_p \subseteq \mathbb{Q}_p(\mu_{n_p})$. Für $n = \prod_{p \text{ verzweigt}} p^{v_p(n_p)}$ lässt sich $\#G(K(\mu_n)|\mathbb{Q}) \leq [\mathbb{Q}(\mu_n) : \mathbb{Q}]$ zeigen, was $K \subseteq \mathbb{Q}(\mu_n)$ impliziert.)

(iv) Ist $L|K$ eine unverzweigte Erweiterung lokaler Körper, so sind für $i \in \{0, -1\}$ und $n \in \mathbb{N}$ die Gruppen $\widehat{H}^i(G(L|K), U_L) = \widehat{H}^i(G(L|K), U_L^{(n)}) = 1$.

(v) Bestimme $N_{\mathbb{Q}_p(\sqrt{p})|\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(\sqrt{p})^\times \leq \mathbb{Q}_p^\times$.

(vi) Sei I die von $-1, 5$ und 26 erzeugte abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{Q}_5^\times$. Bestimme $K|\mathbb{Q}_5$ endlich abelsch mit $N_{K|\mathbb{Q}_5} K^\times = I$.

Aufgabe 24. *(4+3+4 Punkte.)*
Sei K ein Zahlkörper. Einen stetigen Homomorphismus $\chi\colon C_K \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ nennen wir *Hecke-Charakter*, einen stetigen Homomorphismus $\chi\colon G(K^{\mathrm{ab}}|K) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ *Galois-Charakter.* Ohne Beweis darf verwendet werden, dass $\mathbb{A}_K^\times \longrightarrow G(K^{\mathrm{ab}}|K)$ surjektiv ist und der Kern gerade die von $K^\times$ und der Zusammenhangskomponente der 1 von $\mathbb{A}_K^\times$ erzeugte abgeschlossene Untergruppe ist.

(i) Es gibt eine Eins-zu-Eins-Korrespondenz zwischen den Hecke-Charakteren endlicher Ordnung und den Galois-Charakteren endlicher Ordnung.

(ii) Jeder Galois-Charakter hat endliche Ordnung.

(iii) Beschreibe einen Isomorphismus $\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times \cong \mathbb{Q}^\times \times \widehat{\mathbb{Z}}^\times \times \mathbb{R}_{>0}$. Betrachte dazu die Abbildung $\mathrm{rat}((x_\nu)_\nu) = x_\infty/|x_\infty|_\infty \cdot \prod_p p^{v_p(x_p)}$.