# Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie 2

Sommersemester 2016

Prof. Dr. O. Venjakob
O. Thomas

Blatt 5
keine Abgabe, Besprechung am 6.6.

**Aufgabe 17.** *(Strahlklassenkörper von $\mathbb{Q}(\zeta_3)$.)*
Charakterisiere das Zerlegungsverhalten von Primidealen von $\mathbb{Q}(\zeta_3)$ in $\mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt[3]{2})$. Folgere, dass $\mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\zeta_3)(6\mathbb{Z}[\zeta_3])$.

**Aufgabe 18.** *(Verzweigte Erweiterungen von $\mathbb{Q}_3$.)*
Gib so explizit wie möglich die maximale abelsche Erweiterung vom Exponenten 3 von $\mathbb{Q}_3$ und alle seine Zwischenkörper inkl. Galois-Gruppen über $\mathbb{Q}_3$ an.

**Aufgabe 19.** *(Reziprozität für zyklotomische Erweiterungen von $\mathbb{Q}$.)*
Sei $m > 1$ eine natürliche Zahl, $\zeta$ eine primitive $m$te Einheitswurzel und betrachte die Erweiterung $L = \mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}$. Betrachte

$$\begin{aligned} F\colon I_{\mathbb{Q}}(m\mathbb{Z}) &\longrightarrow G(L|\mathbb{Q}) \\ p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}\mathbb{Z} &\longmapsto \mathrm{Frob}_{p_1,L}^{n_1} \circ \dots \circ \mathrm{Frob}_{p_r,L}^{n_r}. \end{aligned}$$

(i) $F(a\mathbb{Z})\zeta = \zeta^a$ für alle zu $m$ teilerfremden natürlichen Zahlen $a$.
(ii) $F$ ist surjektiv.
(iii) Was ist der Kern von $F$?
(iv) Bringe $F$ in Verbindung mit der Formulierung der Hauptsätze über globale Klassenkörpertheorie.

**Aufgabe 20.** *(Herbrand-Quotienten.)*
Sei $p$ prim, $\langle\sigma\rangle \cong G \cong \mathbb{Z}/p$ und $A$ ein $G$-Modul. Betrachte die Endomorphismen $f = 0$ und $g\colon a \mapsto pa$. Dann ist

$$Q(G, A)^{p-1} = \frac{Q(A^G)^p}{Q(A)},$$

falls $Q(A)$ definiert ist.

Die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A^G \longrightarrow A \xrightarrow{\sigma-1} A^{\sigma-1} \longrightarrow 0$$

kann hilfreich sein, wenn man ferner zeigt, dass $\mathbb{Z}[G]/(1+\sigma+\dots+\sigma^{p-1})\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[\zeta_p]$ und unter dieser Identifikation $p = (\sigma-1)^{p-1}\epsilon$ mit $\epsilon$ einer Einheit in $\mathbb{Z}[G]/(1+\sigma+\dots+\sigma^{p-1})\mathbb{Z}$ gilt.