Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie 2

Sommersemester 2016

Prof. Dr. O. Venjakob
O. Thomas

Blatt 4
keine Abgabe, Besprechung am 30.5.

Aufgabe 13. *(Abelisierung proendlicher Gruppen.)*
Für proendliche Gruppen G setzen wir $G^{\mathrm{ab}} = G/\overline{[G,G]}$.

(i) Sind $(G_i)_i$ endliche Gruppen, so ist $\varprojlim_i (G_i^{\mathrm{ab}}) = (\varprojlim_i G_i)^{\mathrm{ab}}$.

(ii) Erfüllt $G \mapsto G^{\mathrm{ab}}$ für proendliche Gruppen eine universelle Eigenschaft?

(iii) Für jeden Körper K ist die Vereinigung seiner endlichen abelschen Erweiterungen in einem fest gewählten separablen Abschluss gerade seine maximale abelsche Erweiterung.

Aufgabe 14. *(Primzahlen der Form $x^2 + ny^2$ I.)*
Charakterisiere die Primzahlen, welche sich als $x^2 + 5y^2$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$ schreiben lassen. Verwende dabei ohne Beweis, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})(\mathfrak{a}) = \mathbb{Q}(\sqrt{-5}, \sqrt{-1})$ für $\mathfrak{a} = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-5})}$.

Aufgabe 15. *(Lineare Unabhängigkeit der Charaktere.)*
Sei G eine Gruppe, K ein Körper und $\chi_1, \ldots, \chi_n \colon G \longrightarrow K^\times$ paarweise verschiedene Gruppenhomomorphismen. Für $a_i \in K$ sei $\sum_i a_i \chi_i(g) = 0$ für alle $g \in G$. Dann sind alle $a_i = 0$.

Aufgabe 16. *(Restringierte Produkte I.)*
Sei $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie lokalkompakter abelscher Gruppen, $S \subseteq \Lambda$ eine endliche Teilmenge und $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda\setminus S}$ eine Familie kompakter offener Untergruppen. Sei G das restringierte Produkt von $(G_\lambda)_\lambda$ bezüglich $(U_\lambda)_\lambda$.

(i) Für jede hausdorffsche abelsche Gruppe Z ist

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(G, Z) = \left\{ (\phi_\lambda)_\lambda \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(G_\lambda, Z) \;\middle|\; \forall U \in \tau(0)\, \forall^{\text{fast}}\, \lambda \in \Lambda \setminus S \colon \phi_\lambda(U_\lambda) \subseteq U \right\},$$

wobei $\tau(0)$ die offenen Umgebungen der 0 bezeichnet.

(ii) Eine Umgebungsbasis des neutralen Elements von G ist durch Mengen der Form

$$\prod_{\lambda\in S'} B_\lambda \times \prod_{\lambda\in\Lambda\setminus S'} U_\lambda$$

gegeben, wobei S' die endlichen Teilmengen von Λ und B_λ eine Umgebungsbasis des neutralen Elements in G_λ durchläuft. Für $\lambda \in S$ verstehen wir U_λ hier einfach als G_λ.

(iii) Beschreibe für Zahlkörper $K|\mathbb{Q}$ einen natürlichen Isomorphismus von topologischen Galois-Moduln

$$\mathbb{A}_K \cong K \otimes_{\mathbb{Q}} ((\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}) \oplus \mathbb{R}).$$

Wie muss man das Tensor-Produkt topologisieren?