Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie 2

Sommersemester 2016

Prof. Dr. O. Venjakob
O. Thomas

Blatt 3, Ausarbeitung 1
Abgabe bis 20.5., 9:00 Uhr.

Aufgabe 9. *(4+4 Punkte)*

(i) Die auf Blatt 2 eingeführten Gruppen K_m sind allesamt pro-p.

(ii) $\mathbb{Z}$ ist keine proendliche Gruppe.

Aufgabe 10. *(6+4 Punkte)*

(i) Sei F ein Körper und G eine proendliche Gruppe, welche auf F operiert. Diese Aktion sei treu (d. h. nur das neutrale Element operiert trivial auf ganz F) und der Stabilisator eines jeden Elements aus F sei eine offene Untergruppe von G. Dann ist $F|F^G$ galoissch und $G(F|F^G) \cong G$.

(ii) Sei G eine proendliche Gruppe. Dann existiert eine galoissche Körpererweiterung $L|K$ mit $G(L|K) \cong G$.

Aufgabe 11. *(4+4 Punkte)*

(i) Für je zwei endliche Körper sind ihre absoluten Galois-Gruppen isomorph.

(ii) $G(\mathbb{Q}(\mu(p))|\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/(p-1) \times \mathbb{Z}_p$ mit $\mu(p) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mu_{p^n}$.

Aufgabe 12. *(6·3+6 Punkte)*

Sei K ein Körper, welcher eine primitive $n$te Einheitswurzel enthält.

(i) Ist $L|K$ galoissch mit $G(L|K) \cong \mathbb{Z}/n$, so existiert ein $a \in K$ mit $L = K(\sqrt[n]{a})$.

Betrachte hierzu das Element $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \zeta^i \sigma^i(\beta)$ für ein geeignetes $\beta \in L$, wobei ζ eine primitive $n$te Einheitswurzel und σ einen Erzeuger von $G(L|K)$ bezeichnet. Ohne Beweis darf auch der *Satz von der Normalbasis* verwendet werden.

(ii) Zwei Erweiterungen $K(\sqrt[n]{a}), K(\sqrt[n]{b})$ vom Grad n sind genau dann gleich, wenn es eine zu n teilerfremde Zahl r und ein $c \in K$ gibt mit $a = c^n b^r$.

Setze nun $K_A = K(\sqrt[n]{A})$ für $A \leq K^\times/(K^\times)^n$.

(iii) $K_A|K$ ist galoissch. $G(K_A|K)$ ist abelsch und vom Exponenten n.

(iv) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \langle -, - \rangle \colon G(K_A|K) \times A &\longrightarrow \mu_n \\ (\sigma, \overline{a}) &\mapsto \sigma(\sqrt[n]{a})/\sqrt[n]{a} \end{aligned}$$

ist wohldefiniert, bilinear und nicht-ausgeartet. Alle $\langle -, \overline{a} \rangle$ sind stetig, wenn wir μ_n mit der diskreten Topologie versehen.

(v) $A \mapsto K_A$ induziert eine Bijektion zwischen den Untergruppen von $K^\times/(K^\times)^n$ und den abelschen Erweiterungen vom Exponenten n von K.

(vi) $A \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(G(K_A|K), \mu_n)$.

(vii) Für $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_2$ und $\mathbb{Q}_5$ bestimme die Galois-Gruppe der maximalen abelschen Erweiterung vom Exponenten 2.

Ohne Beweis darf *Pontryagin-Dualität* verwendet werden: Aus $A \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(G(K_A|K), \mu_n)$ folgt damit unmittelbar $G(K_A|K) \cong \mathrm{Hom}(A, \mu_n)$. Hier versehen wir A und μ_n mit der diskreten Topologie und $\mathrm{Hom}(A, \mu_n)$ mit der *Kompakt-Offen-Topologie*, d. h. mit der gröbsten Topologie, in der alle $\mathcal{U}_{K,U} = \{f \colon A \longrightarrow \mu_n \mid f(K) \subseteq U\}$ offen sind, wobei $K \subseteq A$ die kompakten Teilmengen von A und $U \subseteq \mu_n$ die offenen Teilmengen von μ_n durchläuft.