Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie 2

Sommersemester 2016

Prof. Dr. O. Venjakob
O. Thomas

Blatt 2
keine Abgabe, Besprechung am 2.5.

Aufgabe 5. *(Umgebungsbasen II.)*

(i) Ein Gruppenhomomorphismus $f\colon G \longrightarrow H$ topologischer Gruppen ist genau dann stetig, wenn es eine Umgebungsbasis $(V_i)_i$ von e_H gibt, sodass alle $f^{-1}(V_i)$ Umgebungen von e_G sind.

(ii) Jedes Element einer lokal-kompakten hausdorffschen Gruppe hat eine Umgebungsbasis aus kompakten Umgebungen.

Aufgabe 6. *(Über* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ *I.)*
Für eine Primzahl p betrachte die topologische Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ mit der Teilraumtopologie der Produkttopologie auf $\mathbb{Q}_p^{n^2}$. Setze $K_m = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p) \mid A \equiv \mathbb{1} \mod p^m\}$.

(i) Die Familie $(K_m)_m$ bildet eine Umgebungsbasis der 1 in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$.

(ii) Alle $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p/p^m)$ sind surjektiv, insbesondere ist $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)/K_m \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p/p^m)$ für alle m.

Hierbei kann folgende Aussage hilfreich sein: Ist $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_p)$ derart, dass $\sum_{k\in\mathbb{N}_0} T^k$ konvergiert, so ist der Grenzwert gerade $(\mathbb{1} - T)^{-1}$.

Aufgabe 7. *(Zerlegung lokal-konstanter Funktionen.)*
Sei G eine lokal-kompakte, total unzusammenhängende topologische Gruppe und $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine lokal-konstante Funktion mit kompaktem Träger. Dann existieren paarweise disjunkte kompakte und offene Mengen $U_1, \dots, U_n \subseteq G$ und komplexe Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ mit $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{U_i}$, wobei $\chi_{U_i}\colon X \longrightarrow \{0,1\}$ die charakteristische Funktion von U_i bezeichnet.

Sind alle Voraussetzungen notwendig?

Aufgabe 8. *(Über* $\varprojlim^1$ *I.)*
Betrachte die $(\mathbb{N}, \leq)$-indizierten inversen Systeme

$$
\begin{aligned}
G' &= p\mathbb{Z} \hookleftarrow p^2\mathbb{Z} \hookleftarrow p^3\mathbb{Z} \hookleftarrow \dots \\
G &= \mathbb{Z} \xleftarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z} \xleftarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z} \xleftarrow{\mathrm{id}} \dots \\
G'' &= \mathbb{Z}/p \xleftarrow{\mathrm{proj}} \mathbb{Z}/p^2 \xleftarrow{\mathrm{proj}} \mathbb{Z}/p^3 \xleftarrow{\mathrm{proj}} \dots
\end{aligned}
$$

von diskreten topologischen Gruppen und die offensichtlichen Morphismen inverser Systeme $G' \xrightarrow{\phi} G \xrightarrow{\psi} G''$. Obwohl jede Sequenz $0 \longrightarrow G'_n \xrightarrow{\phi_n} G_n \xrightarrow{\psi_n} G''_n \longrightarrow 0$ exakt ist, ist es die Sequenz im Limes nicht.