Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie 2

Sommersemester 2016

Prof. Dr. O. Venjakob
O. Thomas

Blatt 1
keine Abgabe, Besprechung am 25.4.

Aufgabe 1. *(Proposition 4 der Vorlesung.)*
Sei G eine topologische Gruppe mit neutralem Element e.

(i) Jede Umgebung U von e enthält eine offene Umgebung V von e mit $VV \subseteq U$ und $V = V^{-1}$.

(ii) Jede Umgebung U von e enthält eine Umgebung V von e mit $\overline{V} \subseteq U$.

(iii) Ist $H \leq G$ eine Untergruppe, so auch der Abschluss $\overline{H}$. Ist H normal in G, so auch $\overline{H}$.

(iv) Jede offene Untergruppe von G ist auch abgeschlossen.

Aufgabe 2. *(Umgebungsbasen I.)*
Sei G eine Gruppe und $\mathfrak{U}$ eine Menge von Teilmengen von G, welche allesamt das neutrale Element enthalten. Formuliere (und verifiziere) Bedingungen an $\mathfrak{U}$, sodass es eine eindeutige Topologie auf G gibt, mit der G eine topologische Gruppe ist und sodass die Menge der Umgebungen des neutralen Elements gerade $\mathfrak{U}$ ist.

Aufgabe 3. *(Proposition 8 der Vorlesung.)*
Sei G eine topologische Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe.

(i) G operiert stetig auf G/H, d. h. $G \times G/H \longrightarrow G/H, (g, xH) \mapsto gxH$ ist stetig.

(ii) Die Projektion $\pi \colon G \longrightarrow G/H$ ist stetig.

(iii) G/H ist hausdorffsch genau dann, wenn H in G abgeschlossen ist.

(iv) G/H ist diskret genau dann, wenn H in G offen ist.

(v) Ist H in G normal, so ist G/H eine topologische Gruppe und π ein stetiger Gruppenhomomorphismus.

Aufgabe 4. *(Beispiele.)*

(i) Finde Beispiele für Proposition 4.1 und 4.2.

(ii) Finde abgeschlossene Untergruppen in einer topologischen Gruppe, die nicht offen sind.

(iii) Finde Untergruppen in einer topologischen Gruppe, die nicht abgeschlossen sind.