Ankündigung zum Seminar

Grothendiecks Galois-Theorie

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. K. Wingberg
O. Thomas

Inhalt

Die aus der Algebra 1 wohlbekannte Galois-Theorie stellt einen Zusammenhang zwischen den Untergruppen der Automorphismengruppe gewisser Körpererweiterungen und ihren Zwischenkörpern her. Tatsächlich sind endliche Körpererweiterungen aber nicht die einzigen Objekte, für die es eine solche Galois-Korrespondenz gibt: Auch für Überlagerungen aus der Topologie, holomorphe Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen, étale Morphismen zwischen Schemata, Erweiterungen von Differentialkörpern und vielem mehr lassen sich Galois-Theorien formulieren. Hierzu gibt es eine recht einheitliche Theorie: Grothendiecks Galois-Theorie. In diesem Framework lautet das Hauptresultat der Galois-Theorie von Körpererweiterungen dann etwa:

Theorem. *Sei k ein Körper und k^{sep} ein separabler Abschluss. Der Funktor $A \mapsto \mathrm{Hom}_k(A, k^{sep})$ induziert eine Antiäquivalenz zwischen der Kategorie endlicher étaler k-Algebren und der Kategorie endlicher Mengen mit stetiger $G(k^{sep}|k)$-Wirkung.*

Im Seminar wollen wir zuerst die Galois-Theorie für (auch unendliche) algebraische Erweiterungen à la Grothendieck formulieren und uns danach der klassischen Galois-Theorie topologischer Überlagerungen zuwenden, in welcher die Fundamentalgruppe die Rolle der Galois-Gruppe übernimmt. Im Anschluss werden wir (zusammenhängende kompakte) Riemannsche Flächen X und ihre Körper meromorpher Funktionen $\mathfrak{M}(X)$ betrachten. Tatsächlich induziert $X \mapsto \mathfrak{M}(X)$ wieder eine Antiäquivalenz zwischen den Riemannschen Flächen und den endlich erzeugten Körpererweiterungen vom Transzendenzgrad 1 über $\mathbb{C}$. Via proendlicher Vervollständigung gibt diese Antiäquivalenz einen Zusammenhang zwischen der (topologischen) Galois-Theorie von Riemannschen Flächen und der (algebraischen) Galois-Theorie ihrer Körper meromorpher Funktionen. Auf diese Weise werden wir dann zeigen, dass über $\mathbb{C}(t)$ jede endliche Gruppe als Galois-Gruppe auftritt.

Die analoge Fragestellung, ob jede endliche Gruppe als Galois-Gruppe über $\mathbb{Q}$ auftaucht, ist nach wie vor offen. Wir werden aber zeigen, dass $\mathbb{Q}$ Hilbertsch ist: Taucht eine Gruppe G als Galois-Gruppe einer endlichen Erweiterung vom rationalen Funktionenkörper $\mathbb{Q}(t)$ auf, so auch als Galois-Gruppe über $\mathbb{Q}$.

Zu guter Letzt werden wir uns der Galois-Theorie der Differentialgleichungen zuwenden und das klassische (algebraische!) Resultat zeigen, dass e^{x^2} keine elementare Stammfunktion besitzt.

Zielgruppe

Studierende der Mathematik (Bachelor/Master, Diplom und Lehramt)

Voraussetzungen

Algebra 2; Kenntnisse der Funktionentheorie 1 sind wünschenswert.

Zeit und Ort

Donnerstags, 14 Uhr ct
HS 3 (INF 288)

Vorbesprechung

Dienstag, 21. Juli 2015, 13.00 Uhr
HS 1 (INF 288)

Literatur

[CL05] Antoine Chambert-Loir. *A field guide to algebra*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2005.

[Gru67] K. Gruenberg. Profinite groups. In *Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965)*, pages 116–127. Thompson, Washington, D.C., 1967.

[May99] J. P. May. *A concise course in algebraic topology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.

[MM99] Gunter Malle and B. Heinrich Matzat. *Inverse Galois theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[Ser92] Jean-Pierre Serre. *Topics in Galois theory*, volume 1 of *Research Notes in Mathematics*. Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA, 1992. Lecture notes prepared by Henri Damon [Henri Darmon], With a foreword by Darmon and the author.

[Sza09] Tamás Szamuely. *Galois groups and fundamental groups*, volume 117 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[Völ96] Helmut Völklein. *Groups as Galois groups*, volume 53 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996. An introduction.