

# Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

## Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. K. Wingberg  
O. Thomas

Blatt 13  
Abgabe bis 28.1.2016, 11:00h

---

**Aufgabe 49.** (4·1.5 Punkte)

Sei  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{51})$  und  $\mathfrak{a} = (2, 1 + \sqrt{51}) \subseteq \mathcal{O}_K$ .

- (i)  $\mathfrak{a} = 2\mathbb{Z} + (1 + \sqrt{51})\mathbb{Z}$ .
- (ii) Bestimme  $\mathfrak{a}^{-1}$ .
- (iii)  $\mathfrak{a}$  ist ein Primideal.
- (iv) Bestimme  $\mathfrak{N}(\mathfrak{a})$ .

**Aufgabe 50.** (6 Punkte)

$h_{\mathbb{Q}(\sqrt{-23})} = 3$ .

**Aufgabe 51.** (3+3 Punkte)

- (i)  $h_{\mathbb{Q}(\sqrt{6})} = 1$ .
- (ii)  $h_{\mathbb{Q}(\sqrt{7})} = 1$ .

**Aufgabe 52.** (3+3 Punkte)

Bestimme Grundeinheiten von  $\mathbb{Q}(\sqrt{23})$  und  $\mathbb{Q}(\sqrt{29})$ .

**Zusatzaufgabe 7.** (4 Punkte)

Sei  $d \in \mathbb{N}$  quadratfrei. Hat  $d$  einen Primteiler  $\equiv 3 \pmod{4}$ , so hat jede Einheit in  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$  die Norm 1.

**Zusatzaufgabe 8.** (2+2 Punkte)

- (i) Finde alle  $n \in \mathbb{N}$ , sodass die Gleichung  $x^{nx} = y^y$  mindestens eine Lösung in den natürlichen Zahlen hat.
- (ii) Bestimme alle Lösungen in den natürlichen Zahlen von  $x^{5x} = y^y$ .

**Zusatzaufgabe 9.** (4 Punkte)

Finde alle Lösungen in den ganzen Zahlen von  $y^2 = x^3 - 4$ .

**Organisatorisches.**

Dies ist das letzte Übungsblatt. Notwendig zur Teilnahme an der Klausur am 16.2. im GHS von INF 252 sind insgesamt 145 Punkte in den Übungen bzw. ein eingereicher Nachweis über einen fehlgeschlagenen Prüfungsversuch im Modul Elementare Zahlentheorie (vgl. Website). Die formale Anmeldung zur Klausur besteht im Erscheinen am 16.2. zur Klausur.

Bei der Klausur sind keinerlei Hilfsmittel gestattet. Sie besteht aus zwei Lückentext-Aufgaben, bei denen ohne Begründung Definitionen und Ergebnisse der Vorlesung sowie leichte Rechnungen abgefragt werden, und vier Aufgaben, die in ihrer Form den Aufgaben der Übungen ähneln und bei denen alle Schritte zu begründen sind.

Die Klausur beginnt um 9.15 Uhr, Einlass ist wenige Minuten vorher. Studierenden- und Personalausweis o. ä. sind bereitzuhalten.