

# Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. K. Wingberg  
O. Thomas

Blatt 12  
Abgabe bis 21.1.2016, 11:00h

---

## Aufgabe 45. (3+3 Punkte)

- (i) Bestimme die Primidealzerlegung von  $6\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-5})}$ .
- (ii) Sei  $p$  prim. Bestimme die Primidealzerlegung von  $p\mathcal{O}_K$  für  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$  und  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ .

## Aufgabe 46. (6 Punkte)

Seien  $K$  und  $K'$  zwei quadratische Zahlkörper. Stimmen die Mengen derjenigen Primzahlen überein, die in  $K$  bzw.  $K'$  zerlegt sind, so ist  $K = K'$ .

## Aufgabe 47. (6 Punkte)

$$\#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a})^\times = \mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} 1 - \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})}$$

für quadratische Zahlkörper  $K$  und nicht-triviale Ideale  $\mathfrak{a}$ , wobei  $\mathfrak{p}$  die Primideale durchläuft, welche  $\mathfrak{a}$  teilen.

## Aufgabe 48. (6 Punkte)

Folgere aus der Tatsache, dass  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-163})}$  faktoriell ist, dass  $n^2 - n + 41$  prim ist für  $-39 \leq n \leq 40$ .