Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. K. Wingberg — Blatt 11

O. Thomas — Abgabe bis 14.1.2016, 11:00h

Aufgabe 41. *(6 Punkte)*
Sei K ein quadratischer Zahlkörper. Für jedes nicht-triviale gebrochene Ideal $\mathfrak{a} \subset K$ gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) \in \mathbb{Z}$, sodass

$$\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})},$$

wobei $\mathfrak{p}$ alle Primideale $\neq 0$ von $\mathcal{O}_K$ durchläuft und $v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = 0$ für alle bis auf endlich viele $\mathfrak{p}$.

Aufgabe 42. *(6 Punkte)*
Sei $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ und $\alpha \in K \setminus \mathbb{Q}$. Setze $\Lambda_\alpha = \{a + b\alpha \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ und $R_\alpha = \{x \in K \mid x\Lambda_\alpha \subseteq \Lambda_\alpha\}$. Dann ist R_α ein Ring, der in $\mathcal{O}_K$ enthalten ist.

Aufgabe 43. *(6 Punkte)*
Finde alle Lösungen von $y^2 = x^3 - 2$ in den ganzen Zahlen. Folgere, dass 26 die einzige natürliche Zahl n ist, für die $n-1$ eine Quadratzahl und $n+1$ eine Kubikzahl ist.

Aufgabe 44. *(3+3 Punkte)*

(i) Ist $p > 3$ prim, so ist Φ_3 genau dann irreduzibel modulo p, wenn p eine Primitivwurzel modulo 3 ist.

(ii) Φ_{12} ist reduzibel modulo jeder Primzahl.