

# Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

## Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. K. Wingberg  
O. Thomas

Blatt 10  
Abgabe bis 7.1.2016, 11:00h

---

Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins und  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \subseteq R$  drei Ideale.

**Aufgabe 37.** (2 Punkte)  
 $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$

**Aufgabe 38.** (4 Punkte)  
 $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ .

**Aufgabe 39.** (3 Punkte)  
 $\mathfrak{a}$  ist genau dann ein Primideal, wenn  $R/\mathfrak{a}$  nullteilerfrei ist.

**Aufgabe 40.** (3 Punkte)  
 $\mathfrak{a}$  ist genau dann ein Maximalideal, wenn  $R/\mathfrak{a}$  ein Körper ist.

**Zusatzaufgabe 2.** (3 Punkte)  
Bestimme alle Tripel von Primzahlen  $(p, q, r)$ , sodass  $p^q + p^r$  eine Quadratzahl ist.

**Zusatzaufgabe 3.** (3 Punkte)  
Bestimme alle Lösungen in den ganzen Zahlen von  $y^2 = x^3 - 1$ .

**Zusatzaufgabe 4.** (3 Punkte)  
Bestimme alle Lösungen in den natürlichen Zahlen von  $n^m = m^n$ .

**Zusatzaufgabe 5.** (3.1 Punkte)  
Berechne die folgenden Legendre-Symbole:

(i)  $\left(\frac{1234}{7253}\right)$

(ii)  $\left(\frac{4321}{6781}\right)$

(iii)  $\left(\frac{2222}{8819}\right)$

**Zusatzaufgabe 6.** (6 Punkte)

Auf der Suche nach einem Weihnachtsbaum fragt Carl seine Brieffreundin Sophie<sup>1</sup>, ob sie nicht wüsste, wo er eine schöne Tanne in Braunschweig kaufen könne. Sophie kennt dort in der Tat drei Baumschulen, Carl ist aber skeptisch, ob diese so kurz vor Weihnachten noch eine hinreichend große Auswahl an Bäumen anböten.

Zufälligerweise kennt Sophie die Zahlen der je noch zum Verkauf stehenden Tannen genau. Um Carl aber etwas zu ärgern, teilt sie ihm nur das Produkt der drei Zahlen mit – nämlich 28730 – und ferner ihre Summe. Carl ist daraufhin etwas erbost, weil er aus diesen Informationen noch nicht rekonstruieren kann, wie viele Tannen jetzt in den Baumschulen jeweils noch zum Verkauf stehen. Als Sophie ihm aber mitteilt, dass jede der drei Baumschule nur noch weniger Tannen verkaufen kann als die Zahl der diophantischen Gleichungen, die Carl im vergangenen Jahr gelöst hat, fällt bei ihm der Groschen.

Wie viele diophantische Gleichungen hat Carl im vergangenen Jahr gelöst?

---

<sup>1</sup>Sophie war Carl in den ersten drei Jahren ihrer Korrespondenz allerdings als Antoine Auguste Le Blanc bekannt, weil sie fürchtete, sie würde als Mathematikerin sonst nicht ernst genommen.