Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. K. Wingberg
O. Thomas

Blatt 8
Abgabe bis 10.12.2015, 11:00h

Aufgabe 29. *(6 Punkte)*
Seien $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, g = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ Polynome mit $a_n b_m \neq 0$. Betrachte die $(n+m) \times (n+m)$-Matrix

$$R(f,g) = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \cdots & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & \cdots & b_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_m & \cdots & \cdots & \cdots & b_0 \end{pmatrix}$$

und die Zahl $r(f,g) = \det R(f,g)$.
Ist $f = a_n \prod_{i=0}^{n}(X - \alpha_i)$ und $g = b_m \prod_{i=0}^{m}(X - \beta_i)$ mit komplexen Zahlen α_i, β_i, so ist

$$r(f,g) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (\alpha_i - \beta_j).$$

Aufgabe 30. *(6 Punkte)*
Sei $f \in \mathbb{Z}[X]$ ein normiertes Polynom. Beschreibe einen Algorithmus, der in endlich vielen Schritten f in seine irreduziblen Teiler faktorisiert, der also insbesondere in endlich vielen Schritten feststellt, ob f irreduzibel ist.
Dazu kann es sich als nützlich erweisen, für $f = gh$ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ sich die möglichen Werte von $g(x_i)$ zu überlegen und Lagrange-Interpolation zu verwenden.

Aufgabe 31. *(4·1.5 Punkte)*

(i) Bestimme alle abelschen Gruppen mit 2015 Elementen bis auf Isomorphie.

(ii) Bestimme alle abelschen Gruppen mit 2016 Elementen bis auf Isomorphie.

(iii) Bestimme das Minimalpolynom von $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ über $\mathbb{Q}$.

(iv) Bestimme das Minimalpolynom von $\sqrt{2 + \sqrt[3]{2}}$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 32. *(2+4 Punkte)*

(i) Sei $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei. Bestimme das Minimalpolynom von $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ über $\mathbb{Q}$. Wann hat es ganzzahlige Koeffizienten?

(ii) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha + 8 = 0$. Ist $\frac{4}{\alpha}$ ganz-algebraisch?