Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. K. Wingberg
O. Thomas

Blatt 7
Abgabe bis 3.12.2015, 11:00h

Aufgabe 25. *(2+2 Punkte)*
Sei $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei und $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

(i) $N(\alpha \cdot \beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$

(ii) $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$ genau dann, wenn $N(\alpha) \in \mathbb{Z}^\times$.

Aufgabe 26. *(6 Punkte)*
Sei $d \in \mathbb{Z}$ ungerade, quadratfrei und kleiner als -2. Dann ist 2 in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ irreduzibel, aber nicht prim und $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ insbesondere nicht faktoriell.

Aufgabe 27. *(4+4 Punkte)*
Seien $e_1, \ldots, e_k, e'_1, \ldots, e'_{k'} \in \mathbb{N}_{>1}$, $r, r' \in \mathbb{N}_0$ und sowohl $e_i | e_{i+1}$ als auch $e'_i | e'_{i+1}$ für alle i. Sei ferner

$$A = \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/e_k\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^{r'} \oplus \mathbb{Z}/e'_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/e'_{k'}\mathbb{Z}.$$

(i) $r = r'$.

(ii) $k = k'$ und $e_i = e'_i$ für alle i.

Charakterisiere hierzu r bzw. r' als die maximale Länge einer $\mathbb{Z}$-linear unabhängigen Teilmenge (was ist das?) und versuche $(e_i)_i$ aus $(\#\{a \in A \mid na = 0\})_n$ zu rekonstruieren.

Aufgabe 28. *(1+5·1 Punkte)*

(i) Für $f \in \mathbb{Z}[X]$ und $k \in \mathbb{Z}$ ist $f(X)$ genau dann irreduzibel, wenn $f(X + k)$ irreduzibel ist.

(ii) Überprüfe die folgenden Polynome auf Irreduzibilität über $\mathbb{Z}$:

   (a) $X^4 + X + 1$

   (b) $X^6 + X + 1$

   (c) $X^2 - d$ und $d \in \mathbb{Z}$ kein Quadrat.

   (d) $X^3 - 2X^2 + 11X - 22$

   (e) $X^{p-1} + \cdots + X + 1$ für p prim.