

# Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. K. Wingberg  
O. Thomas

Blatt 5  
Abgabe bis 19.11.2015, 11:00h

---

**Aufgabe 17.** (3+3 Punkte)

- (i) Ist  $p \neq 2$  prim und  $n$  eine natürliche Zahl, so gibt es  $x, y, z \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ , nicht alle null in  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , sodass  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ .
- (ii) Konstruiere ein solches Lösungstupel in  $\mathbb{Z}/125\mathbb{Z}$ .

**Aufgabe 18.** (6 Punkte)

Sei  $a \in \mathbb{Z}$ . Bestimme die Kardinalität der Lösungsmenge von  $X^2 + aY^2 = 0$  in  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  für alle Primzahlen  $p$ .

**Aufgabe 19.** (6 Punkte)

Sei  $p \neq 2$  prim. Für alle  $a, b, c \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^\times$  gibt es  $x, y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  mit  $ax^2 + by^2 = c$ .

**Aufgabe 20.** (6 Punkte)

Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen  $n$ , welche nicht prim sind, für die  $n$  die Zahl  $3^{n-1} - 2^{n-1}$  teilt.