Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. K. Wingberg
O. Thomas

Blatt 3
Abgabe bis 5.11.2015, 11:00h

Aufgabe 9. *(5+1 Punkte)*

(i) Die Abbildung $P\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, welche eine natürliche Zahl auf das Produkt ihrer positiven Teiler abbildet (etwa $P(12) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12 = 1728$), ist injektiv. Man kann hierzu zum Beispiel aus einer Primfaktorzerlegung von N die Primfaktorzerlegung von $P(N)$ konstruieren.

(ii) Ist P auch surjektiv?

Aufgabe 10. *(3+3 Punkte)*

(i) Klassifiziere diejenigen Primzahlen p, für die 3 ein quadratischer Rest modulo p ist.

(ii) Seien p und q verschiedene Primzahlen mit $p \equiv q \equiv 3 \mod 4$. Dann hat die Gleichung

$$x^2 - qy^2 = p$$

keine Lösung in den ganzen Zahlen.

Aufgabe 11. *(6 Punkte)*
Sei $f \in \mathbb{Z}[X]$ ein nicht-konstantes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Dann gibt es unendlich viele Primzahlen p, für die f in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ eine Nullstelle hat.

Aufgabe 12. *(6 Punkte)*
Es seien a und b natürliche Zahlen. Ist auch

$$n = \frac{a^2 + b^2 + 1}{ab}$$

eine natürliche Zahl, so ist $n = 3$.