

Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. K. Wingberg
O. Thomas

Blatt 2
Abgabe bis 29.10.2015, 11:00h

Aufgabe 5. (3+3 Punkte)

Für natürliche Zahlen n bezeichnen wir mit $\sigma(n)$ die Summe der positiven Teiler von n , etwa ist

$$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12.$$

- (i) Sind m und n teilerfremde natürliche Zahlen, so ist $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$.
- (ii) Ist p eine Primzahl und k eine natürliche Zahl, so ist $\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1}-1}{p-1}$.

Aufgabe 6. (3+3 Punkte)

- (i) Eine natürliche Zahl n heißt *vollkommen*, wenn $\sigma(n) = 2n$ gilt. Eine gerade Zahl n ist genau dann vollkommen, wenn sie sich schreiben lässt als $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$ für ein $m \in \mathbb{N}$ mit $2^m - 1$ prim.
- (ii) Sind p und q verschiedene Primzahlen, so ist $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.

Aufgabe 7. (6 Punkte)

Zur Ankunft der Milliardärin Claire Zahanassian in der Kleinstadt Güllen führt der dortige Turnverein einige akrobatische Kunststücke vor. Anfangs stellen sich die Mitglieder in einigen Dreier-Pyramiden auf. (Die Milliardärin ist nicht beeindruckt.) Im Anschluss finden sich die Turner*innen in Zweiergruppen zusammen, wobei ein Turner übrig bleibt. Je ein Partner eines solchen Duos versucht auf den Schultern des anderen einen Handstand. Exakt die Hälfte der Paare scheitert aber an dieser Übung und eine Turnerin verletzt sich so arg, dass sie im weiteren Verlauf nicht mehr an der Vorführung teilnehmen kann. Bei der letzten Übung, bei der je vier sogenannte Base-Athleten einen sogenannten Flyer-Athleten recht waghalsig in die Luft werfen, bleibt daher nun nur ein Mitglied des Turnvereins untätig am Rand stehen.

Aus wie vielen Menschen besteht die Turngruppe, wenn die Bühne maximal Platz für 90 Menschen bietet?

Aufgabe 8. (6 Punkte)

Hat man 39 aufeinander folgende natürliche Zahlen, so gibt es darunter mindestens eine, deren Quersumme in Dezimalschreibweise durch elf teilbar ist.

Zusatzaufgabe 1. (3 Punkte)

Es gibt 38 aufeinander folgende natürliche Zahlen, deren Quersummen in Dezimalschreibweise allesamt nicht durch elf teilbar sind.