Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. K. Wingberg
O. Thomas

Blatt 1
Abgabe bis 22.10.2015, 11:00h

Aufgabe 1. *(6 Punkte)*
Für ganze Zahlen a, b und Primzahlen p ist $a^p + b^p \equiv (a+b)^p \mod p$.

Aufgabe 2. *(6 Punkte)*
Seien a und n natürliche Zahlen ≥ 2. Ist $a^n - 1$ eine Primzahl, so ist zwingend $a = 2$ und n prim.

Aufgabe 3. *(6 Punkte)*
Bestimme alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $y^2 = x^3 + 16$.
Man kann dabei zum Beispiel wie folgt vorgehen:

1. Zuerst zeigt man, dass es keine ganzzahligen Lösungen mit ungeradem y gibt. Hier ist es hilfreich zu beachten, dass es keine dritten Potenzen mit Differenz exakt acht gibt.
2. Ist $y^2 = x^3 + 16$ mit geradem y, so kann man zeigen, dass y sogar durch vier teilbar ist und x durch zwei. Man erhält so eine Lösung der Gleichung $2u^2 = t^3 + 2$.
3. Nun folgert man, dass u zwingend ungerade sein muss und schreibt $u = 2u' + 1$. Man zeigt anschließend, dass u' oder $u' + 1$ zwingend null sein muss.
4. Setzt man nun alles rückwärts wieder ein, erhält man als einzig mögliche Lösungen $(0, \pm 4)$, welche offenbar auch Lösungen der Ursprungsgleichung sind.

Aufgabe 4. *(3+3 Punkte)*
Es seien a und b ganze Zahlen.

(i) $2a + 3b$ ist genau dann durch 7 teilbar, wenn $5a + 4b$ durch 7 teilbar ist.

(ii) Sind a und b beide ungerade, so teilt 8 die Differenz $a^2 - b^2$.