

Ankündigung zum Seminar

Einführung in die Theorie elliptischer Kurven

Sommersemester 2015

Prof. Dr. K. Wingberg
O. Thomas

Inhalt

Eine *elliptische Kurve* ist eine Nullstellenmenge einer kubischen Gleichung der Form

$$E: y^2 = x^3 + Ax + B$$

in der projektiven Ebene. In der Sprache der algebraischen Geometrie sind dies gerade die eindimensionalen projektiven Varietäten vom Geschlecht 1. Neben dem Studium der geometrischen Eigenschaften solcher Kurven ist vor allem die Frage nach *rationalen Punkten* von Interesse, d. h. nach Punkten auf E mit rationalen Koordinaten. Während etwa die Frage nach Lösungen von (homogenen) quadratischen Gleichungen (Geschlecht 0) durch den Satz von Hasse-Minkowski eine elegante und effektive Lösung erfährt, stellt dies für Gleichungen der Ordnung 3 eine weitaus größere Herausforderung dar. Für die Anzahl der Punkte einer elliptischen Kurve liefert der *Satz von Hasse-Weil* eine effektive Schranke. Die *Weil-Vermutungen*, welche in ihrer allgemeinen Form erst 1974 durch Deligne bewiesen wurden, lassen sich für elliptische Kurven elementar herleiten. Eine wichtige Eigenschaft einer elliptischen Kurve E über einem Körper K ist die folgende: Man kann auf der Menge der K -rationalen Punkte $E(K)$ eine Verknüpfung definieren, mit der $E(K)$ zu einer abelschen Gruppe wird, d. h. elliptische Kurven sind sog. *abelsche Varietäten*. Diese Gruppenverknüpfung lässt sich sowohl rein algebraisch als auch ganz geometrisch interpretieren.

Der *Satz von Mordell-Weil* sagt nun, dass für jeden Zahlkörper K die Gruppe $E(K)$ endlich erzeugt ist.

Wir werden in diesem Seminar zunächst kurz die benötigten Grundlagen der algebraischen Geometrie legen, um dann mit Hilfe des *Satzes von Riemann-Roch* eindimensionale projektive Kurven vom Geschlecht 1 als elliptische Kurven im obigen Sinne zu klassifizieren. Wir werden die Gruppenstruktur auf der Menge der K -rationalen Punkte einführen und diskutieren, die Geometrie elliptischer Kurven näher untersuchen und ferner die Weil-Vermutungen für elliptische Kurven zeigen.

Im Anschluss betrachten wir elliptische Kurven über lokalen und globalen Körpern, um am Ende den Satz von Mordell-Weil zu beweisen.

Zielgruppe

Studierende der Mathematik (Bachelor/Master, Diplom und Lehramt)

Voraussetzungen

Algebra 1, Grundkenntnisse in der Geometrie der Varietäten.

Für gewisse Vorträge sind weitere Vorkenntnisse in unendlicher Galois-Theorie, algebraischer Zahlentheorie oder algebraischer Geometrie hilfreich. Die benötigten Grundlagen können sich aber auch im Rahmen der Seminarvorbereitung selbstständig erarbeitet werden.

Zeit und Ort

Donnerstag, 14 Uhr ct

HS 3 (INF 288)

Vorbesprechung

Donnerstag, 5. Februar 2015, 13.45 Uhr

HS 3 (INF 288)