Übungen zur Algebraischen Geometrie II

Sommersemester 2015

Prof. Dr. K. Wingberg
O. Thomas

Blatt 11
Abgabe bis 01.07.2015, 14:00h

Aufgabe 41. *(6 Punkte)*
Ist k ein unendlicher Körper und $X = \mathbb{P}^1_k$, so gibt es weder in der Kategorie der quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln noch in der Kategorie der kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln ein projektives Objekt $\mathcal{P}$ mit $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$ exakt.

Aufgabe 42. *(6 Punkte)*
Sei X ein noethersches Schema, auf dem jede kohärente Garbe Quotient einer lokal freien Garbe ist. Dann ist $\mathscr{E}xt^\bullet(-,\mathcal{G})$ für jeden $\mathcal{O}_X$-Modul ein kontravarianter universeller δ-Funktor von der Kategorie der kohärenten Garben auf X in die Kategorie der Garben auf X.

Aufgabe 43. *(6 Punkte)*
Sei $X = \operatorname{Spec} R$ ein affines noethersches Schema und M, N zwei R-Moduln, wobei M endlich erzeugt ist. Dann gibt es für alle i Isomorphismen

$$\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, \widetilde{N}) \cong \operatorname{Ext}^i_R(M,N)$$

und

$$\mathscr{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, \widetilde{N}) \cong \operatorname{Ext}^i_R(M,N)\tilde{}.$$

Aufgabe 44. *(6 Punkte)*
Ist X ein projektives Schema über einem noetherschen Ring und

$$\mathcal{F}^1 \longrightarrow \mathcal{F}^2 \longrightarrow \mathcal{F}^3 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{F}^k$$

eine exakte Sequenz kohärenter Garben auf X, dann ist für $n \gg 0$ auch die Sequenz

$$\Gamma(X, \mathcal{F}^1(n)) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^2(n)) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^3(n)) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^k(n))$$

exakt.