Übungen zur Algebraischen Geometrie II

Sommersemester 2015

Prof. Dr. K. Wingberg
O. Thomas

Blatt 9
Abgabe bis 17.06.2015, 14:00h

Aufgabe 33. *(3+3 Punkte)*
Sei $\mathbf{A}$ eine abelsche Kategorie und A ein Objekt von $\mathbf{A}$. Sei ferner eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \dots$$

mit injektiven Objekten I^k gegeben,

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow X^2 \longrightarrow \dots$$

eine weitere exakte Sequenz in $\mathbf{A}$ und $\phi_{-1}\colon B \longrightarrow A$ ein Morphismus.

(i) Es gibt Morphismen $\phi_k\colon X^k \longrightarrow I^k$, sodass folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{-1}"] & X^0 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_0"] & X^1 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_1"] & X^2 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_2"] & \dots \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & I^2 \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

(ii) Sind $(\phi_k)_{k\geq 0}$ und $(\psi_k)_{k\geq 0}$ Familien von Morphismen wie in Punkt (i), so sind sie homotop.

Aufgabe 34. *(3+3 Punkte)*
Sei X ein topologischer Raum, $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung von X und $\mathcal{F}$ eine welke Garbe auf X.

(i) Benutze Aufgabe 32 um zu zeigen, dass für alle $k > 0$ gilt: $\check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$.

(ii) Für alle $k \geq 0$ gibt es eine natürliche Transformation $\check{H}^k(\mathfrak{U}, -) \longrightarrow H^k(X, -)$.

Aufgabe 35. *(6 Punkte)*
Ist ein Schema X separiert über einer affinen Basis, so ist der Schnitt zweier affin-offener Teilmengen von X selbst wieder affin.

Aufgabe 36. *(6 Punkte)*
Sei X ein noethersches separiertes Schema, $\mathfrak{U}$ eine affine offene Überdeckung von X und $\mathcal{F}$ eine quasi-kohärente Garbe auf X. Dann induzieren die natürlichen Transformationen aus Aufgabe 34 Isomorphismen für alle $k \geq 0$: $\check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong H^k(X, \mathcal{F})$.