Übungen zur Algebraischen Geometrie II

Sommersemester 2015

Prof. Dr. K. Wingberg — Blatt 8

O. Thomas — Abgabe bis 10.06.2015, 14:00h

Sei X ein topologischer Raum, $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X und $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X. Die Menge I sei total geordnet. Für Indizes $i_0, \ldots, i_k \in I$ schreibe $U_{i_0,\ldots,i_k}$ statt $U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_k}$.
Setze jetzt für $k \geq 0$

$$C^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \cdots < i_k} \mathcal{F}(U_{i_0,\ldots,i_k})$$

und definiere für $\alpha \in C^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ das Element $da \in C^{k+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ via

$$(d\alpha)_{i_0,\ldots,i_{k+1}} = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \alpha_{i_0,\ldots,i_{j-1},i_{j+1},\ldots,i_{k+1}}|_{U_{i_0,\ldots,i_{k+1}}}.$$

Oft schreiben wir auch $\alpha_{i_0,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_{k+1}}$ statt $\alpha_{i_0,\ldots,i_{j-1},i_{j+1},\ldots,i_{k+1}}$.

Aufgabe 29. *(3·2 Punkte)*

(i) $d \circ d\colon C^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{k+2}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ ist für $k \geq 0$ die Nullabbildung.

(ii) $\check{H}^k(\mathfrak{U}, -)\colon \mathcal{F} \mapsto \frac{\ker d\colon C^k(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^{k+1}(\mathfrak{U},\mathcal{F})}{\operatorname{im} d\colon C^{k-1}(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^k(\mathfrak{U},\mathcal{F})}$ ist für $k \geq 0$ ein Funktor mit Werten in der Kategorie abelscher Gruppen.

(iii) $\check{H}^0(\mathfrak{U}, -) \cong \Gamma(X, -)$.

Aufgabe 30. *(3·2 Punkte)*

(i) Gibt es einen Index $i \in I$ mit $U_i = X$, so ist $\check{H}^k(\mathfrak{U}, -) = 0$ für $k \geq 1$.

(ii) Es gibt nicht immer die Möglichkeit, der Familie $\check{H}^\bullet(\mathfrak{U}, -)$ die Struktur eines δ-Funktors zu geben.

(iii) Finde einen Raum X und zwei Überdeckungen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$, sodass $\check{H}^\bullet(\mathfrak{U}, -) \not\cong \check{H}^\bullet(\mathfrak{V}, -)$.

Aufgabe 31. *(6 Punkte)*
Sei $X = \operatorname{Spec} R$ ein affines Schema, $\mathcal{F}$ ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul und $\mathfrak{U}$ eine Überdeckung von X durch offene Mengen der Form $U_i = D(g_i)$ mit $g_i \in R$. Dann ist $\check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ für $k \geq 1$.

Aufgabe 32. *(6 Punkte)*
Sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{U}$ eine Überdeckung von X. Für $V \subseteq X$ offen bezeichne mit $\iota_V : V \longrightarrow X$ die Inklusion und setze

$$\mathscr{C}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \cdots < i_k} (\iota_{U_{i_0,\ldots,i_k}})_* \mathcal{F}|_{U_{i_0,\ldots,i_k}}.$$

Es gibt einen in $\mathcal{F}$ funktoriellen Garbenmorphismus $\varepsilon\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ und in $\mathcal{F}$ funktorielle Garbenmorphismen $d\colon \mathscr{C}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathscr{C}^{k+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, sodass die folgende Sequenz exakt ist:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathscr{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d} \mathscr{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d} \mathscr{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \ldots$$