Übungen zur Algebraischen Geometrie II

Sommersemester 2015

Prof. Dr. K. Wingberg
O. Thomas

Blatt 7
Abgabe bis 03.06.2015, 14:00h

Aufgabe 25. *(6 Punkte)*
Sei R ein kommutativer noetherscher Ring mit Eins, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und $M \subseteq N$ zwei endlich erzeugte R-Moduln. Dann gibt es für alle $n > 0$ ein n' mit $M \cap \mathfrak{a}^{n'} N \subseteq \mathfrak{a}^n M$.

Aufgabe 26. *(3+3 Punkte)*
Bezeichne mit $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ den Einheitskreis mit der von $\mathbb{R}^2$ vererbten Unterraumtopologie.

(i) $H^1(S^1, \underline{\mathbb{Z}}) \cong \mathbb{Z}$.

(ii) Bestimme $H^1(S^1, \mathcal{F})$ für $\mathcal{F}(U) = \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$.

Aufgabe 27. *(3+3 Punkte)*
Sei X ein noetherscher topologischer Raum, $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ ein direktes System von Garben auf X und $\mathcal{F} = \varinjlim_{i \in I} \mathcal{F}_i$.

(i) $\mathcal{F}(X) = \varinjlim_{i \in I} (\mathcal{F}_i(X))$.

(ii) Sind alle $\mathcal{F}_i$ injektiv, so auch $\mathcal{F}$.

Aufgabe 28. *(6 Punkte)*
Sei X ein parakompakter topologischer Raum und $\mathcal{O}$ eine Garbe kommutativer Ringe mit Eins auf X. Lässt $\mathcal{O}$ Partitionen der Eins zu, so ist jeder $\mathcal{O}$-Modul azyklisch.
Per Definition lässt $\mathcal{O}$ Partitionen der Eins zu, wenn es für jede offene Überdeckung $X = \bigcup_i U_i$ Elemente $h_i \in \mathcal{O}(X)$ gibt, sodass:

(a) Für alle i ist $\{x \in X \mid h_{i,x} \neq 0\} \subseteq U_i$.

(b) Für jeden Punkt $x \in X$ gibt es nur endlich viele Indizes i mit $h_{i,x} \neq 0$.

(c) Für alle $x \in X$ gilt: $\sum_i h_{i,x} = 1$.

Hinweise. In der Zentralübung am 01.06. werden wir uns mit den in der Vorlesung verwendeten Resultaten der homologischen Algebra beschäftigen.