Übungen zur Algebraischen Geometrie II

Sommersemester 2015

Prof. Dr. K. Wingberg — Blatt 4
O. Thomas — Abgabe bis 13.05.2015, 14:00h

Aufgabe 13. *(3·2 Punkte)*
Sei X integres Schema von endlichem Typ über einem Körper.

(i) Ist $x \in X$ ein abgeschlossener Punkt, so ist $\dim X = \dim \mathcal{O}_{X,x}$.

(ii) Ist $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge, so ist $\operatorname{codim}(Y, X) + \dim Y = \dim X$.

(iii) Ist $U \subseteq X$ eine nicht-leere offene Teilmenge, so ist $\dim U = \dim X$.

Aufgabe 14. *(1+5 Punkte)*
Gib ein Beispiel für einen diskreten Bewertungsring R, der seinen Restklassenkörper enthält. Für alle solchen Ringe R sind für $\mathbb{A}^1_R$ alle Aussagen von Aufgabe 13 falsch.

Aufgabe 15. *(3+3 Punkte)*
Sei X ein Schema und $\mathcal{F}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul von Rang n.

(i) Die Garbe $T^m(\mathcal{F})$ ist lokal frei von Rang n^m.

(ii) Die Garbe $S^m(\mathcal{F})$ lokal frei von Rang $\binom{n+m-1}{n-1}$.

Aufgabe 16. *(6 Punkte)*
Sei S ein graduierter faktorieller Ring, und $d, e > 0$ natürliche Zahlen. Seien $f \in S_d$ und $g \in S_e$ teilerfremd und ungleich Null, und $I = (f, g)$ das von f und g erzeugte homogene Ideal. Setze $X = \operatorname{Proj} S$ und $Z = V_+(f, g) = \operatorname{Proj} S/I$. Dann ist die Sequenz von S-Moduln

$$0 \longrightarrow S(-d-e) \xrightarrow{\varphi} S(-d) \oplus S(-e) \xrightarrow{\psi} I \longrightarrow 0$$

exakt (wobei $\varphi(a) = (-ag, af)$ und $\psi(a, b) = af + bg$) und es existiert eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-d-e) \longrightarrow \mathcal{O}(-d) \oplus \mathcal{O}(-e) \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow 0,$$

wobei $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_X$ die zu Z assoziierte Idealgarbe ist.