Übungen zur Algebraischen Geometrie II

Sommersemester 2015

Prof. Dr. K. Wingberg
O. Thomas

Blatt 2
Abgabe bis 29.04.2015, 14:00h

Aufgabe 5. *(6 Punkte)*
Ist R ein noetherscher ganzabgeschlossener kommutativer Ring mit Eins, so ist

$$R = \bigcap_{\mathfrak{p}} R_{\mathfrak{p}},$$

wobei $\mathfrak{p}$ die Primideale der Höhe Eins durchläuft.

Aufgabe 6. *(5+1 Punkte)*
Sei k ein Körper und $X = \mathbb{P}^1_k$.

(i)

$$\dim_k \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n)) = \begin{cases} n+1 & n \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(ii) $\mathcal{O}_X(n) \ncong \mathcal{O}_X(m)$ für ganze Zahlen $n \neq m$.

Aufgabe 7. *(6 Punkte)*
$\mathbb{P}^2_k \ncong \mathbb{P}^1_k \times_k \mathbb{P}^1_k$.

Aufgabe 8. *(6 Punkte; man achte bei dieser Aufgabe besonders auf einen nachvollziehbaren Aufschrieb)*
Sei R ein (nicht zwingend kommutativer) Ring mit Eins. Ein kommutatives Diagramm D von R-Linksmoduln[1] heißt *schlangbar*[2], wenn es der Form

$$\begin{tikzcd} & D_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & D_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & D_3 \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D_1' \arrow[r, "f'"] & D_2' \arrow[r, "g'"] & D_3' & \end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen ist. Morphismen $D \longrightarrow E$ von schlangbaren Diagrammen sind durch solche Homomorphismen $D_i \longrightarrow E_i$ und $D_i' \longrightarrow E_i'$ gegeben, dass alle induzierten Diagramme kommutieren.
Für schlangbare Diagramme D wie oben existiert ein Homomorphismus von R-Linksmoduln $\delta_D\colon \ker c \longrightarrow \operatorname{coker} a$, sodass die Sequenz

$$S(D) = \left(\ker a \longrightarrow \ker b \longrightarrow \ker c \xrightarrow{\delta_D} \operatorname{coker} a \longrightarrow \operatorname{coker} b \longrightarrow \operatorname{coker} c\right)$$

exakt und $D \mapsto S(D)$ ein Funktor ist.

---

[1] D. h. wir haben eine Abbildung $R \times M \longrightarrow M$, $(r, m) \mapsto r \cdot m$, die den üblichen Gesetzen genügt. Im Gegensatz zum kommutativen Fall können wir dann jedoch nicht einfach $m \cdot r$ durch $r \cdot m$ definieren, weshalb wir zwischen Links-, Rechts- und Bimoduln unterscheiden. Die Aussage gilt aber natürlich auch für Rechtsmoduln: Ist R ein Ring und sind $x, y \in R$, so setze $x \cdot_{\mathrm{opp}} y = y \cdot x$. $R^{\mathrm{opp}} = (R, +, \cdot_{\mathrm{opp}})$ ist dann ebenfalls ein Ring und die Kategorie der R-Rechtsmoduln ist äquivalent zur Kategorie der R^{opp}-Linksmoduln. Aus dem Schlangenlemma für Linksmoduln über R^{opp} folgt damit das Schlangenlemma für Rechtsmoduln über R.

[2] Diese völlig künstliche Definition ist nur dazu da, die Aussage „Der Verbindungsmorphismus des Schlangenlemmas ist natürlich.“ zu konkretisieren. Für einen weniger lächerlichen und den Obertutor zufriedenstellenden Alternativbegriff gibt es Bonuspunkte!