Übungen zur Algebraischen Geometrie II

Sommersemester 2015

Prof. Dr. K. Wingberg
O. Thomas

Blatt 1
Abgabe bis 22.04.2015, 14:00h

Aufgabe 1. *(3+3 Punkte)*
Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und M ein R-Modul. Setze $X = \operatorname{Spec} R$ und $\mathcal{F} = \widetilde{M}$. Für $m \in M$ bezeichne mit $\operatorname{ann} m = \{r \in R \mid rm = 0\}$ den Annulator von m.

(i) Ist $m \in \mathcal{F}(X) = M$, so ist $\operatorname{supp} m = \{x \in X \mid m_x \neq 0\} = V(\operatorname{ann} m)$.

(ii) Ist R noethersch und M endlich erzeugt, so ist $\operatorname{supp} \mathcal{F} = \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\} = V(\bigcap_{m \in M} \operatorname{ann} m)$.

Aufgabe 2. *(3+3 Punkte)*
Sei X ein Schema und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul.

(i) $\mathcal{F}$ ist genau dann quasi-kohärent, wenn $\mathcal{F}$ lokal Kokern eines Morphismus zwischen freien Garben ist.

(ii) Ist X noethersch, so ist $\mathcal{F}$ genau dann kohärent, wenn $\mathcal{F}$ lokal Kokern eines Morphismus zwischen freien Garben endlichen Ranges ist.

Aufgabe 3. *(6 Punkte)*
Sei Y ein Schema und $\mathcal{A}$ eine quasi-kohärente Garbe von $\mathcal{O}_Y$-Algebren (d. h. wir haben einen Morphismus von Garben von Ringen $\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{A}$, welcher $\mathcal{A}$ die Struktur eines quasi-kohärenten $\mathcal{O}_Y$-Moduls gibt). Es gibt ein Y-Schema $f\colon \mathbf{Spec}\,\mathcal{A} \longrightarrow Y$ derart, dass

(a) es für jede affin-offene Teilmenge $V \subseteq Y$ einen Isomorphismus $\alpha_V\colon f^{-1}(V) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Spec} \mathcal{A}(V)$ gibt und

(b) für affin-offene Teilmengen $U \subseteq V \subseteq Y$ folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(U) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d, "\mathrm{inc}"] & \operatorname{Spec} \mathcal{A}(U) \arrow[d, "\operatorname{Spec}(\mathrm{res})"] \\
f^{-1}(V) \arrow[r, "\alpha_V"] & \operatorname{Spec} \mathcal{A}(V)
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 4. *(6 Punkte)*
Ist Y ein Schema und $\mathcal{A}$ eine quasi-kohärente Garbe von $\mathcal{O}_Y$-Algebren, so ist $f\colon \mathbf{Spec}\,\mathcal{A} \longrightarrow Y$ aus Aufgabe 3 durch folgende universelle Eigenschaft charakterisiert:

$$\operatorname{Hom}_{/Y}(-, \mathbf{Spec}\,\mathcal{A}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{A}, (- \longrightarrow Y)_* \mathcal{O}_-),$$

d h. es gibt eine (in X mit Strukturmorphismus $g\colon X \longrightarrow Y$) funktorielle Isomorphie zwischen den Y-Schema-Morphismen $X \longrightarrow \mathbf{Spec}\,\mathcal{A}$ und denjenigen Garbenmorphismen $\mathcal{A} \longrightarrow g_* \mathcal{O}_X$, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathcal{A} \arrow[rr] & & g_* \mathcal{O}_X
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist.