Auflösung von Singularitäten

Teil 1

Hilmar Kielblock

20. November 2014

1 Rationale Abbildungen

Definition 1.1. Seien X und Y Varietäten. Ein **Morphismus** von X nach Y ist eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ mit:

1. φ stetig.
2. Für alle $U \subset Y$ offen gilt: $f \in \Gamma(U) \Rightarrow f \circ \varphi \in \Gamma(\varphi^{-1}(U))$. $(\star)$

Ein **Isomorphismus** ist ein bijektiver Morphismus φ, sodass φ^{-1} Morphismus ist.

Definition 1.2.

1. Seien X und Y Varietäten, $U_i \subset X$ offene Untervarietäten. Zwei Morphismen $f_i : U_i \to Y$ heißen **äquivalent**, falls sie auf $U_1 \cap U_2$ übereinstimmen. Eine **rationale Abbildung (von X nach Y)** ist eine Äquivalenzklasse von Morphismen. Der **Definitionsbereich** einer rationalen Abbildung F ist $\mathrm{dom}(F) = \bigcup_i U_i \subset X$, für U_i alle offenen Untervarietäten, sodass ein Morphismus $f_i : U_i \to Y$ existiert, welcher in F liegt.
2. Eine rationale Abbildung F heißt **dominant**, falls für einen beliebigen Verteter $f_i : U_i \to Y$ (und damit für jeden Vertreter) gilt, dass $f_i(U_i)$ dicht in Y liegt.
3. $A \subset B$ Erweiterung lokaler Ringe. B **dominiert** A, falls das maximale Ideal von A im maximalen Ideal von B enthalten ist.

Satz 1.3 (Fulton 6.6 Prop. 11)**.** *Sei F eine dominante rationale Abbildung von X nach Y, $U \subset X, V \subset Y$ offene affine Menge mit $f : U \to V$ ein Morphismus der F repräsentiert. Dann gilt:*

i) Die induzierte Abbildung $\tilde{f} : \Gamma(V) \to \Gamma(U), z \mapsto z \circ f$ ist injektiv und lässt sich zu einem injektiven Homomorphismus von $k(Y) = k(V)$ nach $k(X) = k(U)$ erweitern. Dieser Homomorphismus ist unabhängig von der Wahl von f, daher schreiben wir auch $\tilde{F}$.

ii) Für $P \in X$ und $Q \in Y$ gilt:

$$P \in \mathrm{dom}(F) \text{ mit } F(P) = Q \Leftrightarrow \mathscr{O}_P(X) \text{ dominiert } \tilde{F}(\mathscr{O}_Q(Y)).$$

iii) Zu jedem Homomorphismus φ von $k(Y)$ nach $k(X)$ existiert genau eine dominant rationale Abbildung von X nach Y die φ induziert.

Beweis. Siehe auch [Har77], §1 Theorem 4.4. □

Definition 1.4. Eine rationale Abbildung $F : X \to Y$ heißt **birational**, falls es offene Mengen $U \subset X, V \subset Y$ und einen Isomorphismus $f : U \to V$ gibt, der F repräsentiert. X und Y heißen dann **birational äquivalent**.

Korollar 1.5 (Fulton 6.6 Prop. 12)**.** *Seien X und Y Varietäten. Dann sind äquivalent:*

a) X und Y sind birational äquivalent.

b) $k(X) \cong k(Y)$.

Beweis. Siehe auch [Har77], §1 Korollar 4.5. □

2 Algebraische Funktionenkörper und Dimension von Varietäten

Konvention. Von hier an sei K/k eine endlich erzeugte Körpererweiterung und k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Definition 2.1. Sei n die kleinste ganze Zahl, sodass $K/k(x_1, \dots, x_n)$ algebraisch ist für $x_1, \dots, x_n \in K$. Dann heißt n der **Transzendenzgrad** von K über k. Wir schreiben

$$n = \mathrm{TrDeg}_k(K).$$

Wir nennen K einen **algebraischen Funktionenkörper in n Variablen über k**.

Satz 2.2. *Sei K ein algebraischer Funktionenkörper in einer Variable über k, $x \in K \backslash k$. Dann gilt:*

i) K ist endlich algebraisch über $k(x)$.

ii) Ist $\mathrm{char}(k) = 0$, so existiert $y \in K$ mit $K = k(x, y)$.

iii) Sei $k \subset R$ Integritätsbereich mit $\mathrm{Quot}(R) = K$ und $0 \neq \mathfrak{p} \neq R$ ein Primideal in R. Dann ist k natürlich isomorph zu $R/\mathfrak{p}$.

Beweis. i) Sei $t \in K$ so, dass $K/k(t)$ algebraisch ist. Dann gibt es $F \in k(T)[X]$ mit $F(t, x) = 0$. Durch Multiplizieren mit T können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $F \in k[T, X]$. Wäre nun $F(T, x) = 0$, so wäre x algebraisch über k, im Widerspruch zur algebraischen Abgeschlossenheit von $k \not\ni x$. Dann ist $0 \neq F(T, x) \in k(x)[T]$, also t algebraisch über $k(x)$. Also ist $K/k(x)$ endlich algebraisch.

ii) Da $\mathrm{char}(k) = 0$ ist, folgt dies aus dem Satz vom primitiven Element.

iii) Es genügt zu zeigen, dass $\iota : k \to R/\mathfrak{p}$ surjektiv ist. Sei dazu $x \in R$ mit $\bar{x} \notin \mathrm{Im}(\iota)$ und $0 \neq y \in \mathfrak{p}$. Nach i) ist y algebraisch über $k(x)$ und wir finden wie in i) ein Polynom $F = \sum a_i(X)Y^i \in k[X, Y]$ mit $F(x, y) = 0$. Da $y \neq 0$ ist können wir F so wählen, dass $a_0(X) \neq 0$ ist, in dem wir $F = Y^r F'$ schreiben und F durch F' ersetzen. Wegen $F(x, y) = 0 \in \mathfrak{p}$ ist dann auch $a_0(x) \in \mathfrak{p}$. Wir erhalten $a_0(\bar{x}) = 0$, also $\bar{x}$ algebraisch über k, im Widerspruch zur algebraischen Abgeschlossenheit von k.

□

Bemerkung. Aussage ii) gilt im folgendem Sinne auch in $\mathrm{char}(k) = p > 0$: Es existiert $x \in K$, sodass $K/k(x)$ endlich separabel ist, also insbesondere auch ein $y \in K$ mit $K = k(x, y)$. Im Allgemeinen kann $x \in K$ aber nicht wie im Satz beliebig gewählt werden.

Definition 2.3. Sei X eine Varietät. Dann ist $k(X)$ eine endlich erzeugte Erweiterung von k und wir nennen

$$\dim(X) = \mathrm{TrDeg}_k(k(X))$$

die **Dimension** von X. Ist $\dim(X) = 1$, so heißt X **Kurve**.

Satz 2.4. *Sei V eine Varietät.*

i) Ist $U \subset V$ eine offene Untervarietät, so gilt $\dim(U) = dim(V)$.

ii) Ist V affin und V^* der projektive Abschluss von V, so gilt $\dim(V) = \dim(V^*)$.

iii) $\dim(V) = 0 \Leftrightarrow V = \{P\}$.

iv) Ist V eine Kurve, so ist jede abgeschlossene echte Untervarietät $W \subset V$ ein Punkt.

v) Eine abgeschlossene Untervarietät von $\mathbb{A}^2$ (bzw. $\mathbb{P}^2$) hat Dimension 1 genau dann, wenn es eine affine (bzw. projektive) ebene Kurve ist.

Beweis. i) Da U dicht in V liegt, gilt $k(U) = k(V)$.

ii) $\alpha : k(V^*) \to k(V), f/g \mapsto f_*/g_*$ ist ein Isomorphismus.

iii) Wenn $\dim(V) = 0$, so ist $k(V)/k$ algebraisch und umgekehrt. Da k algebraisch abgeschlossen ist, gilt also $k = k(V) = \Gamma(V)$. Wegen i) und ii) können wir uns auf den Fall $V \subset \mathbb{A}^n$ abgeschlossen beschränken. Hier gilt aber

$$\begin{aligned} \Gamma(V) = k \Leftrightarrow k[X_1, \ldots, X_n]/I(V) \text{ ist Körper} &\Leftrightarrow I(V) \text{ ist maximal} \\ \Leftrightarrow V = \{P\}. \end{aligned}$$

iv) Wie in iii) genügt es, den affinen Fall zu betrachten. Wir schreiben $R = \Gamma(V)$ und $\mathfrak{p} = I(W) \cap \Gamma(V)$. Dann ist $\mathfrak{p}$ prim, da $I(W)$ prim ist, und $\Gamma(W) = R/\mathfrak{p}$. Nach Satz 2.2 iii) erhalten wir $\Gamma(W) = k$. Das Ergebnis gilt dann nach iii).

v) Wegen ii) genügt es, den Fall $V \subset \mathbb{A}^2$ zu betrachten. Da $k(V) = \mathrm{Quot}(k[X,Y]/I(V))$, ist $\dim(V) \in \{0,1,2\}$. Falls $V = \mathbb{A}^2$, so ist $\dim(V) = 2$, falls $V = \{P\}$ ist nach iii) $\dim(V) = 0$. Also folgt aus $\dim(V) = 1$, dass $V = V(F)$ für ein nicht-konstantes Polynom $F \in k[X,Y]$ ist. Andererseits gilt für eine ebene Kurve $V = V(F)$, dass $\dim(V) = TrDeg(k[X,Y]/F) \leq 1$ ist, da F nicht konstant. Mit iii) folgt dann $\dim(V) = 1$.

$\square$

Korollar 2.5. *Jede Kurve V ist birational äquivalent zu einer ebenen Kurve.*

Beweis. Nach Satz 2.2 ii) (bzw. der Bemerkung danach für den Fall $\mathrm{char}(k) = p > 0$) gilt $k(V) = k(x,y)$ für $x, y \in k(V)$. Es existiert ein natürlicher Homomorphismus

$$\pi : k[X,Y] \to k[x,y] \subset k(V), X \mapsto x, Y \mapsto y.$$

Sei $I = ker(\pi)$. Dann ist I prim und $V' = V(I) \subset \mathbb{A}^2$ eine Varietät. Wir erhalten $\Gamma(V') = k[X,Y]/I \cong k[x,y]$, also $k(V') \cong k(x,y) = k(V)$. Es ist also $\dim(V') = \dim(V) = 1$ und V' damit eine ebene Kurve wie gewünscht. Nach Korollar 1.5 sind V und V' birational äquivalent. $\square$

Lemma 2.6. *Seien C, C' Kurven und $F : C' \to C$ eine rationale Abbildung. Dann gilt:*

i) F ist entweder dominant oder konstant.

ii) Falls F dominant ist, so ist $k(C')$ endliche algebraische Erweiterung von $\tilde{F}(k(C))$.

Beweis. i) Da sich in C jede abgeschlossene Menge als endliche Vereinigung abgeschlossener Varietäten darstellen lässt, sind die abgeschlossenen Mengen nach Satz 2.4 iv) gerade die diskreten Teilmengen und C selbst. Falls F nicht dominant ist, also $\overline{\mathrm{Im}(F)} \neq C$, muss also $\overline{\mathrm{Im}(F)}$ diskret sein. Dann ist bereits $\mathrm{Im}(F)$ diskret, lässt sich also im Falle $P \neq Q \in \mathrm{Im}(F)$ in offene Mengen $U_P, U_Q \subset \mathrm{Im}(F)$ zerlegen. Dann ist aber $F^{-1}(U_P) \cup F^{-1}(U_Q) = \mathrm{dom}(F) \neq F^{-1}(U_P) \cap F^{-1}(U_Q)$ eine offene Zerlegung (F stetig) der irreduziblen offenen Menge $\mathrm{dom}(F)$, ein Widerspruch.

ii) Nach Satz 2.2 ii) existieren $x, y \in k(C), x', y' \in K(C')$ mit $k(C) = k(x,y)$ und $k(C') = k(x', y')$. Nach Satz 1.3 i) ist $\tilde{F}(k(C)) \subset k(C')$. Wir identifizieren x mit $\tilde{F}(x) \in k(C')$, y analog. Nach Satz 2.2 i) ist $k(x', y')$ algebraisch über $k(x)$, also auch über $k(x,y)$. Die Endlichkeit ist klar, da $k(x', y')$ endlich erzeugt ist.

$\square$

3 Rationale Abbildungen und Isomorphieklassen nicht-singulärer projektiver Kurven

Definition 3.1. Ein Punkt P auf einer Kurve C heißt **einfacher Punkt** oder **einfach**, falls $\mathscr{O}_P(C)$ ein diskreter Bewertungsring (kurz: DVR) ist. Eine Kurve heißt **nichtsingulär**, falls jeder Punkt P auf C einfach ist. Wir schreiben $\mathrm{ord}_P = \mathrm{ord}_P^C$ für die Bewertung von $\mathscr{O}_P(C)$ auf $\mathscr{O}_P(C)$ und $k(C)$.

Definition 3.2. $k \subset K$ Körper. Ein lokaler Ring (bzw. DVR) A heißt **lokaler Ring von** K (bzw. **diskreter Bewertungsring (DVR) von K**), falls $k \subset A \subset K$ und $\mathrm{Quot}(A) = K$.

Bemerkung. V Varietät, $P \in V$. Dann ist $\mathscr{O}_P(V)$ lokaler Ring von $k(V)$.

Lemma 3.3. *X Varietät, $P \neq Q \in X$. Dann existiert ein $f \in k(X)$ mit $f(P) = 0$ und $f(Q) \neq 0$.*

Beweis. Für X offen in einer projektiven Varietät $X' \subset \mathbb{P}^n$ finden wir einen Koordinatenwechsel, sodass $P, Q \in U_i$ für ein i gilt. Dann ist $k(X) = k(X') = k(X' \cap U_i)$, sodass wir X durch $X' \cap U_i \subset \mathbb{A}^n$ ersetzen können.
Wir können uns also auf den affinen Fall $P, Q \in X \subset \mathbb{A}^n$ beschränken. Dann ist $\{P\}$ abgeschlossen, dh. algebraische Menge und wir finden ein $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ mit $F(P) = 0, F(Q) \neq 0$, da sonst $Q \in V(I(\{P\}))$ wäre. Das Bild von F in $k(X)$ hat dann die gewünschten Eigenschaften.

□

Lemma 3.4. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{P}^{n-1} &\to H_\infty \subset \mathbb{P}^n \\ [x_1 : \cdots : x_n] &\mapsto [x_1 : \cdots : x_n : 0] \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus. Insbesondere ist jede projektive Varietät V eine abgeschlossene Untervarietät in $\mathbb{P}^n$ für ein n, sodass V in keiner Hyperebene von $\mathbb{P}^n$ enthalten ist.

Beweis.

1. ψ bijektiv: klar.
2. ψ stetig: Sei $U \subset H_\infty$ abgeschlossen, dann ex. $T \subset k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ Menge von homogenen Polynomen mit $U = H_\infty \cap V(T)$. Wir können jedes $f \in T$ durch $f(X_1, \ldots, X_n, 0)$ ersetzen, ohne $V(T) \cap H_\infty$ zu verändern, da alle Monome, in denen X_{n+1} vorkommt, auf H_∞ Null sind. Also ist ohne Einschränkung $T \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ und $\psi^{-1}(U) = V(T) \subset \mathbb{P}^{n-1}$ ist abgeschlossen.
3. ψ^{-1} stetig: Analog zu 2., wobei $T \subset k[X_1, \ldots, X_n] \subset k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ trivialerweise erfüllt ist.
4. ψ erfüllt $(\star)$: Sei $U \subset H_\infty$ offen, $z \in \Gamma(U) = \{f \in k(H_\infty) \mid f \text{ ist bei } P \text{ definiert für alle } P \in U\}$. Sei nun $P = [x_1 : \cdots : x_n, 0] \in U$ fest. Wir finden Formen $F, G \in k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ vom gleichen Grad, sodass $z = \frac{F}{G}$ und $G(P) \neq 0$. Wir können ohne Einschränkung annehmen (vergleiche 2.), dass $F, G \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Dann ist aber

$$z \circ \psi(P) = \frac{F}{G}([x_1 : \cdots : x_n]) = z(P)$$

definiert, also auch $z \in \Gamma(\psi^{-1}(U))$.

5. ψ^{-1} erfüllt ($\star$): Analog zu 4., benutze Bemerkung in 3..

Für eine abgeschlossene Untervarietät $V \subset H \subset \mathbb{P}^n$ mit Hyperebene H kann durch Koordinatenwechsel ohne Einschränkung angenommen werden, dass $H = H_\infty$. Anwenden des Lemmas liefert $\psi^{-1}(V) \subset \mathbb{P}^{n-1}$ abgeschlossene Untervarietät (ψ stetig!). Induktion liefert die Behauptung. $\square$

Satz 3.5. *Sei C eine projektive Kurve, $K = k(C)$, $L \supset K$ eine Körpererweiterung und $R \not\supset K$ ein DVR von L. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Punkt $P \in C$, sodass $\mathscr{O}_P(C)$ von R dominiert wird.*

Beweis.

Eindeutigkeit: R dominiere $\mathscr{O}_P(C)$ und $\mathscr{O}_Q(C)$. Weiterhin sei $f \in k(C)$ wie in Lemma 3.3. Dann ist $f \in \mathfrak{m}_P(C) = \{g \in \mathscr{O}_P(C) \mid g(P) = 0\}$ und $f \in \mathscr{O}_Q(C)^\times$, also insbesondere $f \in \mathfrak{m}_R$ und $f \in R^\times$, im Widerspruch zu $R^\times = R \backslash \mathfrak{m}_R$.

Existenz: Nach Lemma 3.4 können wir annehmen, dass C eine abgeschlossene Untervarietät in $\mathbb{P}^n$ und in keiner der Hyperebenen H_i für $i = 1, \ldots, n+1$ enthalten ist, dass heißt $U_i \cap C \neq \emptyset$ für $i = 1, \ldots, n+1$. Dann ist $X_i \notin I(C)$ und wir erhalten

$$\Gamma_h(C) = k[X_1, \ldots, X_{n+1}]/I(C) = k[x_1, \ldots, x_{n+1}],$$

wobei die x_i alle nicht Null sind. Wir setzen $N = \max_{i,j} \operatorname{ord}(x_i/x_j)$ und nehmen ohne Einschränkung an (umnummerieren), dass $\operatorname{ord}(x_j/x_{n+1}) = N$ für ein $j \leq n+1$. Dann gilt für $i \leq n+1$

$$\operatorname{ord}(x_i/x_{n+1}) = \operatorname{ord}((x_j/x_{n+1})(x_i/x_j)) = N - \operatorname{ord}(x_j/x_i) \geq 0.$$

Sei nun $0 \neq C \cap U_{n+1} = C_* \subset \mathbb{A}^n$ die Dehomogenisierung von C. Dann haben wir einen surjektiven Homomorphismus

$$\Gamma_h(C) \to \Gamma(C_*),\ F + I(C) \mapsto F_* + I(C_*),$$

da $(G-F)_* = G_* - F_* \in I(C_*) \Leftrightarrow G - F \in I(C)$ (Wohldefiniertheit) und $(F^*)_* = F$ (Surjektivität). Dieser lässt sich auf dem Erzeugendensystem von $\Gamma_h(C)$ beschreiben durch

$$k[x_1, \ldots, x_{n+1}] \to \Gamma(C_*),\ x_i \mapsto x_i/x_{n+1},$$

das heißt $\Gamma(C_*) \cong k[x_1/x_{n+1}, \ldots, x_n/x_{n+1}]$. Wegen $\operatorname{ord}(x_i/x_{n+1}) \geq 0$ liegt das Erzeugendensystem von $\Gamma(C_*)$ also komplett in R und es gilt $\Gamma(C_*) \subset R$.

Wir setzen nun $J = \mathfrak{m}_R \cap \Gamma(C_*)$. J ist Primideal, da es Einschränkung eines maximalen Ideals in einer Ringerweiterung ist. Dann ist $W = V(J)$ eine abgeschlossene Untervarietät von C_*. Wir betrachten folgende Fälle:

1. $W = C_*$. Dann ist $J = 0$, also $\Gamma(C_*)\backslash\{0\} \subset R^\times$ und damit $K = k(C) = k(C_*) \subset R$, im Widerspruch zu den Vorraussetzungen.

2. $W \neq C_*$. Dann gilt nach Satz 2.4 iv), dass $W = \{P\}$ für ein $P \in C_*$. Damit ist J maximal.

Wir zeigen $\mathscr{O}_P(C_*) \subset R$. Sei dazu $f \in \mathscr{O}_P(C_*)$. Dann existiert $a, b \in \Gamma(C_*)$ mit $f = a/b, b(P) \neq 0$, also $b \notin J \subset \mathfrak{m}_R$. Dann ist $b \in R^\times$, also $f \in R$. Wegen $\mathfrak{m}_P = \mathscr{O}_P(C_*)J \subset \mathfrak{m}_R$ wird $\mathscr{O}_P(C_*) = \mathscr{O}_P(C)$ von R dominiert. □

Korollar 3.6. *Sei C' eine Kurve, C eine projektive Kurve und $F : C' \to C$ eine rationale Abbildung. Dann enthält der Definitionsbereich von F jeden einfachen Punkt von C'. Insbesondere gilt für C' nichtsingulär, dass der Definitionsbereich ganz C', also F ein Morphismus ist.*

Beweis. Nach Lemma 2.6 i) müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. F ist konstant. Dann ist der Definitionsbereich von F ganz C' und falls $F(P) = Q$ für ein $P \in C'$ ist, so besteht F aus den Einschränkungen des Morphismus $T \mapsto Q$ für alle $T \in C'$.

2. F ist dominant. Nach Lemma 2.6 ii) ist dann $L = k(C')$ eine endlich algebraische Erweiterung von $K = k(C)$ via $\tilde{F}$. Sei $P \in C'$ ein einfacher Punkt, $R = \mathscr{O}_P(C')$ der zugehörige DVR, also $L = \operatorname{Quot}(R)$. Wäre $K \subset R$, so wäre $K \subset R \subset L$ eine endlich algebraische Erweiterung, also R ein Körper im Widerspruch dazu, dass R ein diskreter Bewertungsring ist. Also gilt $K \not\subset R$. Dann existiert nach Satz 3.5 ein eindeutig bestimmter Punkt Q, sodass $\mathscr{O}_Q(C)$ von $R = \mathscr{O}_P(C')$ dominiert wird. Nach Satz 1.3 ii) gilt $F(P) = Q$ und P ist im Definitionsbereich von F.

□

Korollar 3.7. *Sei C eine projektive Kurve und C' eine nichtsinguläre Kurve. Dann besteht eine natürliche 1-1-Beziehung zwischen dominanten Morphismen $f : C' \to C$ und Homomorphismen $\tilde{f} : k(C) \to k(C')$.*

Beweis. Nach Korollar 3.6 haben wir eine natürliche 1-1-Beziehung zwischen dominanten Morphismen und dominanten rationalen Abbildungen von C' nach C und erhalten die Aussage nach Satz 1.3 iii). □

Korollar 3.8. *Seien C und C' nichtsinguläre projektive Kurven. Dann gilt*

$$C \cong C' \Leftrightarrow k(C) \cong k(C').$$

Beweis. Nach Korollar 3.7 kommt jeder Homomorphismus $\tilde{f} : k(C) \to k(C')$ von einem dominanten Morphismus von C' nach C. Diese sind nach Satz 1.3 ii) injektiv, also Isomorphismen. □

Korollar 3.9. *Sei C eine nichtsinguläre projektive Kurve. Dann besteht eine natürliche 1-1-Beziehung zwischen den Punkten von C und den diskreten Bewertungsringen von $k(C)$.*

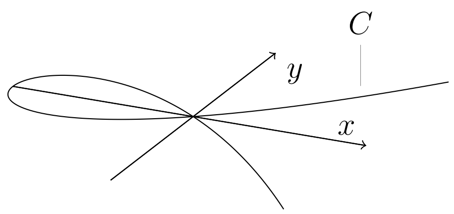
Beweis. Für $P \in C$ ist $\mathscr{O}_P(C)$ ein diskreter Bewertungsring von $k(C)$. Ist R ein beliebiger diskreter Bewertungsring von $k(C)$, so dominiert R nach Satz 3.5 den deskreten Bewertungsring $\mathscr{O}_P(C)$ für eindeutig bestimmtes $P \in C$. Da $\operatorname{Quot}(R) = k(C) = \operatorname{Quot}(\mathscr{O}_P(C))$ und $\mathscr{O}_P(C) \subset R$ gilt, folgt die Gleichehit. □

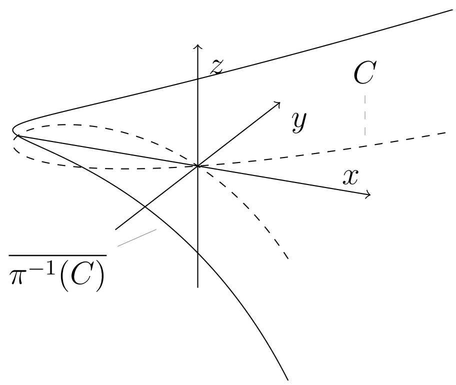
4 Aufblasungen von Punkten im $\mathbb{A}^2$

Ziel. Wir haben eine Kurve (nach Definition 2.3) $C \subset \mathbb{A}^2$ mit einer Singularität gegeben und suchen eine birational äquivalente Kurve ohne diese Singularität. Wir entwickeln ein Verfahren, dass dies für den Fall eines gewöhnlichen mehrfachen Punktes erfüllt und werden das Verfahren auch für andere Singularitäten untersuchen.

Idee. Wir können durch Koordinatenwechsel annehmen, dass die Singularität in $(0,0)$ gegeben ist und dass X keine Tangente zu C ist. Wir fügen jedem Punkt unserer Kurve eine dritte Koordinate hinzu, die eindeutig bestimmt ist, mit Ausnahme von $(0,0)$, dem wir für jede Tangente einen einzelnen Punkt zuordnen. Genauer können wir für $x \neq 0$ in $\mathbb{A}^3$ als Z-Koordinate den Wert y/x, welcher für $x \neq 0$ eindeutig bestimmt ist, hinzufügen. Durch Wahl eines geeigneten Abschlusses erhalten wir erneut eine Kurve (diesmal in $\mathbb{A}^3$), die birational äquivalent zu unser Ausgangskurve ist. Die zu $(0,0)$ gehörenden Punkte sind gerade von der Form $(0,0,z_i)$, wobei z_i die Steigung einer Tangente in $(0,0)$ ist, also der Grenzwert von y/x für $x \to 0$. Ist $(0,0)$ die einzige Singularität und gewöhnlicher mehrfacher Punkt, so ist unsere konstruierte Kurve in $\mathbb{A}^3$ nichtsingulär.

Beispiel. Sei $F = Y^2 - X^2(X+1)$ und $C = V(F) \subset \mathbb{A}^2$. Wir führen beispielhaft obige Konstruktion durch, abgebildet ist links C und rechts die neue Kurve in $\mathbb{A}^3$.





Um die Eigenschaften der konstruierten Kurve nachweisen zu können, führen wir folgende Mengen und Abbildungen ein.

Notation und Lemma 4.1. *Wir setzen* $P = (0,0)$, $U = \{(x,y) \mid x \neq 0\} \subset \mathbb{A}^2$, *sowie* $G = graph(y/x) = \{(x,y,z) \mid y = xz, x \neq 0\}, B = \{(x,y,z) \mid y = xz\} \subset \mathbb{A}^3$. *Weiterhin definieren wir die Projektion* $\pi : B \to U \cup \{P\}, (x,y,z) \mapsto (x,y)$ *und die Menge* $L = \pi^{-1}(P) = \{(0,0,z) \mid z \in k\}$. *Dann gilt:*

i) U *ist offen in* $\mathbb{A}^2$.

ii) B *ist affine Varietät.*

iii) L *ist abgeschlossene Untervarietät in* B.

iv) G ist offen in B und B ist der Abschluss von G in $\mathbb{A}^3$.

v) π ist Morphismus und die Einschränkung $\pi : G \to U$ ist Isomorphismus.

Beweis. i) Wir haben $U = \mathbb{A}^2 \backslash V(X)$.

ii) Es ist $Y - XZ \in k[X, Y, Z]$ irreduzibel und $B = V(Y - XZ)$.

iii) $L = V(X) \cap B$.

iv) $G = B \backslash L$ ist offen in B. Da B irreduzibel ist, ist $\overline{G} = B$.

v) Als Einschränkung der Projektion von $\mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^2$ ist π Morphismus. $\pi : G \to U$ ist bijektiv, da $G = graph(y/x)$ für $(x, y) \in U$. $\pi^{-1} : U \to G, (x, y) \mapsto (x, y, y/x)$ ist Morphismus, da die Abbildungen $(x, y) \mapsto (x), (y), (y/x)$ regulär sind ($x \neq 0$ für alle $(x, y) \in U$).

□

Um mehrere Singularitäten aufzulösen zu können, ist es sinnvoll, die konstruierte Kurve in $\mathbb{A}^3$ wieder nach $\mathbb{A}^2$ zurückzuziehen. Außerdem können wir dann Techniken für ebene Kurven wie Schnittzahlen benutzen.

Notation und Lemma 4.2. *Die Abbildung*

$$\varphi : \mathbb{A}^2 \to B, (x, z) \mapsto (x, xz, z)$$

ist ein Isomorphismus. Wir definieren die Komposition

$$\psi = \pi \circ \varphi : \mathbb{A}^2 \to U \cup \{P\}$$

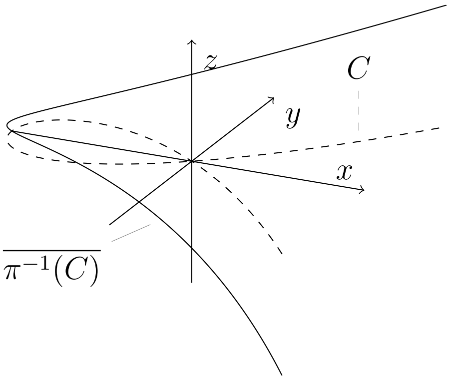
und für $E = \varphi^{-1}(L) = \{(x, z) \in \mathbb{A}^2 \mid x = 0\}$ erhalten wir als Einschränkung

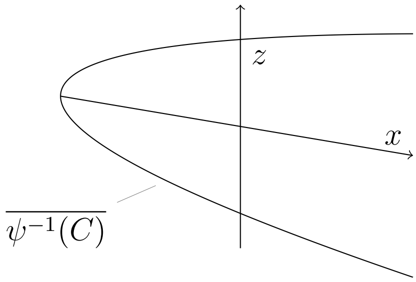
$$\psi : \mathbb{A}^2 \backslash E \to U$$

einen Isomorphismus.

Beweis. φ ist offensichtlich bijektiv und Morphismus, da die Komponentenabbildungen regulär sind. φ^{-1} ist aus dem gleichen Grund Morphismus.
Die Einschränkung von φ auf $\mathbb{A}^2 \backslash E$ nach G ist nach Definition von E und $B = G \dot{\cup} L$ ebenfalls Isomorphismus. Dann ist auch die Komposition ψ ein Isomorphismus, da π auf G ein Isomorphismus ist. □

Beispiel. Zur selben Kurve wie im vorigen Beispiel schauen wir uns das Urbild unserer Kurve (links) von ψ an. Wir erhalten wieder eine Kurve (rechts) im $\mathbb{A}^2$.





Dass dies tatsächlich wieder Kurven sind, liegt an folgendem Lemma. Dies werden wir danach auf unserere Situation anwenden.

Lemma 4.3. *Sei X eine Varietät, $W \subset X$ offene Untervarietät, $Y \subset W$ abgeschlossene Untervarietät und Z der Abschluss von Y in X. Dann gilt*

i) Z ist abgeschlossene Untervarietät in X.

ii) Y ist offene Untervarietät in Z.

Beweis. i) Sei $Z = A_1 \cup A_2$ für abgeschlossene Mengen $A_i \subset Z$. Dann ist $(A_1 \cap Y) \cup (A_2 \cap Y) = Y$. Da Y irreduzibel ist, erhalten wir $A_i \cap Y = Y$ für ein i, und somit $Z = \overline{Y} \subset A_i$, also $Z = A_i$.

ii) $Y = Z \cap W$, wobei W offen in X ist.

□

Notation und Lemma 4.4. *Sei $C \subset \mathbb{A}^2$ Kurve mit $P = (0,0) \in C$ und X keine Tangente in P. Wir setzen $C_0 = C \cap U$ und $C_0' = \psi^{-1}(C_0)$. Wir schreiben C' für den Abschluss von C_0' in $\mathbb{A}^2$ und f für die Einschränkung von ψ auf C'. Dann gilt:*

i) C_0 ist offene Untervarietät in C.

ii) C' ist abgeschlossene Untervarietät in $\mathbb{A}^2$.

iii) C_0' ist offene Untervarietät in C'.

Beweis. i) U ist offen in $\mathbb{A}^2$, also ist $C_0 = U \cap C$ offen in C.

ii) + iii) $C_0 = C \cap U$ ist abgeschlossen in U. Wegen $P \notin C_0$ ist dann $C_0' \subset \mathbb{A}^2 \backslash E$. Da ψ stetig ist, ist C_0' abgeschlossene Untervarietät in der offenen Untervarietät $\mathbb{A}^2 \backslash E$ von $\mathbb{A}^2$. Das Ergebnis folgt dann aus Lemma 4.3.

□

Satz 4.5. *$f : C' \to C$ ist birationale Abbildung. Wir erhalten einen Isomorphismus*

$$\tilde{f} : k(C) = k(x,y) \to k(C') = k(x,z), y \mapsto xz.$$

Beweis. $f : C'_0 \to C_0$ ist Isomorphismus, also ist f birationale Abbildung. Nach Korollar 1.5 erhalten wir einen Isomorphismus

$$\tilde{f} : k(C) \to k(C').$$

Dieser wird nach Satz 1.3 induziert durch eine Abbildung

$$\tilde{f} : \Gamma(C) = k[X,Y]/I(C) \to \Gamma(C') = k[X,Z]/I(C'), h \mapsto h \circ f,$$

wobei $H(X,Y) \mapsto (H \circ f)(X,Z) = H(X,XZ)$ für $H \in k[X,Y]$, also $Y \mapsto XZ$. Identifizieren wir $k(C)$ und $k(C')$ mit $k(x,y)$ und $k(x,z)$ so folgt die Aussage. $\square$

Notation und Lemma 4.6. *Sei $C = V(F)$ für $F = F_r + \cdots + F_n \in k[X,Y]$, wobei F_i homogen vom Grad i ist und $r = m_P(C), n = deg(C)$.*
Dann gilt $C' = V(F')$, wobei

$$F'(X,Z) = F_r(1,Z) + XF_{r+1}(1,Z) + \cdots + X^{n-r}F_n(1,Z).$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} F(X,Y) = F(X,XZ) &= X^rF_r(1,Z) + X^{r+1}F_{r+1}(1,Z) + \cdots + X^nF_n(1,Z) \\ &= X^rF'(X,Z). \end{aligned}$$

Da $F_r(X,Y) \neq 0$, ist auch $F_r(1,Z) \neq 0$, dh. $X \nmid F'$. Wäre nun $F' = GH \in k[X,Z]$, so wäre

$$\begin{aligned} F(X,Y) = F(X,XZ) = X^rF'(X,Z) &= X^rF'(X,Y/X) \\ &= X^rG(X,Y/X)H(X,Y/X) \in k[X,Y] \end{aligned}$$

nicht irreduzibel. Also ist F' irreduzibel.
Für $Q = (x,z) \in C'_0$ ist aber $x \neq 0$, das heißt

$$F'(Q) = 0 \Leftrightarrow (X^rF')(Q) = 0,$$

also $C'_0 \subset V(F')$, und da $V(F')$ abgeschlossen und irreduzibel ist, ist $V(F')$ gleich dem Abschluss C' von C'_0. $\square$

Beispiel. Wir benutzen dieses Lemma um die Formel der Parabel, die wir in den vorherigen Beispielen konstruiert haben, zu bestimmen.

$$\begin{aligned} F = Y^2 - X^2(X+1) &= (Y^2 - X^2) + (-X^3) \\ &= F_2 + F_3 \\ \Rightarrow F'(X,Z) &= F_2(1,Z) + XF_3(1,Z) \\ &= Z^2 - 1 - X \end{aligned}$$

Die Schnittpunkte mit X, also die Punkte über P, sind gerade $(0,-1)$ und $(0,1)$. Außerdem ist $F_2(X,Y) = (Y-X)(Y+X)$, sodass die Tangenten in P Steigung ± 1 haben. Dieser Zusammenhang ist Gegenstand des folgenden Satzes.

Satz 4.7. *Sei*

$$F_r = \lambda \prod_{i=1}^{s} (Y - \alpha_i X)^{r_i},$$

wobei $Y - \alpha_i X$ die Tangenten von F bei P sind und $0 \neq \lambda \in k$. Dann ist $f^{-1}(P) = \{P_1, \ldots, P_s\}$ für $P_i = (0, \alpha_i)$. Weiterhin ist

$$m_{P_i}(C') \leq I(P_i, C' \cap E) = r_i.$$

Falls P ein gewöhnliche Singularität von C ist, so ist jedes P_i ein einfacher Punkt auf C'. Außerdem ist dann $\mathrm{ord}_{P_i}^{C'}(x) = 1$, das heißt x ist Uniformisierende in $\mathscr{O}_{P_i}(C')$.

Beweis. Eine einfache Rechnung zeigt

$$\begin{aligned} f^{-1}(P) = C' \cap E &= \{(x,z) \in \mathbb{A}^2 \mid F'(x,z) = 0\} \cap \{(x,z) \in \mathbb{A}^2 \mid x = 0\} \\ &= \{(0,\alpha) \in \mathbb{A}^2 \mid F_r(1,\alpha) + \sum_{i=1}^{n-r} 0^i F_{r+i}(1,\alpha) = 0\} \\ &= \{P_1, \ldots, P_s\}. \end{aligned}$$

Weiterhin erhalten wir für $A = F_{r+1}(1,Z) + XF_{r+2}(1,Z) + \cdots + X^{n-r-1}F_n(1,Z)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} m_{P_i}(C') \leq I(P_i, F' \cap X) &= I(P_i, (F_r(1,Z) + XA) \cap X) \\ &= I(P_i, \prod_{i=1}^{s} (Z - \alpha_i)^{r_i} \cap X) = \sum_{i=1}^{s} r_i I(P_i, (Z - \alpha_i) \cap X) \\ &= r_i I(P_i, (Z - \alpha_i) \cap X) = r_i. \end{aligned}$$

Die letzte Aussage folgt aus Fulton §3.2 Theorem 1 und der Tatsache, dass X keine Tangente zu C' in P_i ist. □

Satz 4.8. *i) Es existiert eine affine offene Menge $W \ni P$ in C, sodass $W' = f^{-1}(W)$ affine offene Untervarietät in C' und $f(W') = W$ ist.*

ii) Für offene Mengen $V \subset C$ und $V' \subset C'$ mit $P \in V$ und $P_1, \ldots, P_s \in V'$ können wir W wie in i) so wählen, dass $W \subset V$ und $W' \subset V'$.

iii) $\Gamma(W')$ ist endlicher $\Gamma(W)$-Modul und $x^{r-1}\Gamma(W') \subset \Gamma(W)$.

Beweis. i) Wir schreiben $F = \sum_{i+j \geq r} a_{ij} X^i Y^j$ und definieren $H = \sum_{j \geq r} a_{0j} Y^{j-r} = F(0,Y)/Y^r$ mit Bild h in $\Gamma(C)$. Dann ist $H(0,0) = a_{0r} \neq 0$, da X keine Tangente in P ist. Also ist

$$P \in W = C_h = \{Q \in C \mid h(Q) \neq 0\}$$

und

$$W' = f^{-1}(W) = \{Q \in C' \mid h \circ f(Q) \neq 0\} = C'_{\tilde{f}(h)}.$$

C_h und C'_h sind affine offene Mengen in C bzw. C'.
Weiterhin gilt für einen Punkt $Q = (0, \alpha) \in C$ mit $\alpha \neq 0$, dass

$$H(Q) = F(0, \alpha)/\alpha^r = 0.$$

Also ist $Q \notin W$, insbesondere $W \subset U \cup \{P\}$ und W liegt im Bild von f. Dann ist $f(W') = W$.

ii) Sei W wie in i). Dann finden wir $g \in \Gamma(W)$ sodass $g(P) \neq 0$ und $g(Q) = 0$ für alle $Q \in (W \backslash U) \cup f(W' \backslash U')$ (f surjektiv). Dann erfüllen W_g und W'_g die Bedingungen.

iii) Sei a_{ij}, h wie in i), wobei wir nun $h \in \Gamma(W')$ statt $h \circ f = \tilde{f}(h)$ schreiben. Wegen $h(Q) \neq 0$ für alle $Q \in W$ ist dann $h^{-1} \in \Gamma(W) \subset \Gamma(W')$. Wir definieren dann

$$b_i = \sum_{j=r-i}^{n-i} a_{ij} y^{i+j-r}, \ i = 1, \dots, r-1$$
$$b_r = \sum_{i=r}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} a_{ij} x^{i-r} y^j.$$

Wir haben $h = \sum_{j=r}^{n} a_{0j} y^{j-r}$ und erhalten

$$\begin{aligned} hz^r + b_1 z^{r-1} + \dots + b_r &= \sum_{i+j \geq r} a_{ij} y^{i+j-r} z^{r-i} = \sum_{i+j \geq r} a_{ij} x^{i+j-r} z^j \\ &= F'(x, z). \end{aligned}$$

Da $F'(x, z) = 0 \in \Gamma(C') = k[X, Z]/(F')$, ist auch $F'(x, z) = 0 \in \Gamma(W')$, also

$$z^r + b_1/h z^{r-1} + \dots + b_r/h = 0$$

für $b_i/h \in \Gamma(W)$. Da $\Gamma(W') = \Gamma(W)[z]$ folgt die erste Behauptung. Die zweite ist klar, da

$$x^{r-1} z^i = x^{r-1} y^i / x^i \in \Gamma(W) \text{ für } i < r,$$

also auch $z^r \in x^{r-1}\Gamma(W)$.

□

Literatur

[Ful] William Fulton. Algebraic curves. an introduction to algebraic geometry. `http://www.math.lsa.umich.edu/~wfulton/CurveBook.pdf`.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977.